

the 1990s, the number of people in the UK who are employed in the public sector has increased from 10.5 million to 12.5 million, and the number of people in the public sector who are employed in health care has increased from 2.5 million to 3.5 million (Department of Health 2000).

There are a number of reasons for this increase. One of the main reasons is the increasing demand for health care services. The population of the UK is ageing, and there is a growing number of people with chronic conditions such as heart disease, diabetes, and asthma. This has led to an increase in the number of people who are admitted to hospital and the length of their stay.

Another reason for the increase in the number of people employed in the public sector is the increasing demand for health care services in the community. This has led to an increase in the number of people who are employed in community health care services such as home care, mental health services, and substance abuse services.

There are a number of challenges facing the public sector in the UK. One of the main challenges is the increasing demand for health care services. This has led to a shortage of staff and a waiting list for many services. Another challenge is the increasing cost of health care services. This has led to a need for more efficient ways of delivering care.

There are a number of ways in which the public sector can improve its efficiency. One way is to invest in new technology. This can help to reduce the cost of care and improve the quality of care. Another way is to improve the training and development of staff. This can help to ensure that staff are up to date with the latest developments in their field.

There are a number of ways in which the public sector can improve its financial performance. One way is to reduce the cost of care. This can be done by investing in new technology and by improving the training and development of staff. Another way is to increase the revenue of the public sector. This can be done by increasing the number of people who are employed in the public sector.

There are a number of ways in which the public sector can improve its reputation. One way is to improve the quality of care. This can be done by investing in new technology and by improving the training and development of staff. Another way is to increase the transparency of the public sector. This can be done by publishing information about the public sector's performance.

There are a number of ways in which the public sector can improve its relationship with the private sector. One way is to invest in private health care services. This can help to reduce the cost of care and improve the quality of care. Another way is to improve the regulation of private health care services. This can help to ensure that private health care services are of a high quality.

There are a number of ways in which the public sector can improve its relationship with the voluntary sector. One way is to invest in voluntary health care services. This can help to reduce the cost of care and improve the quality of care. Another way is to improve the regulation of voluntary health care services. This can help to ensure that voluntary health care services are of a high quality.

Internet-Adressen – *Adresses Internet*
www.vsmf.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch

Titelseite – *Page de Titre*
Szintillationszähler für den Feldeinsatz. Artikel auf Seite 12 in dieser Ausgabe.

Bulletin N° 151

Inhaltsverzeichnis

AUS DEM VORSTAND	5
Josef Züger Vorwort des neuen Präsidenten/Message du nouveau président/Prefazione del nuovo presidente	5
Arno Gropengiesser Jahresbericht VSMP/SSPMP/SSIMF 2022	6
Franz Meier Thesen zur Reform des Mathematikunterrichts an den Mittelschulen	8
DEUTSCHSCHWEIZERISCHE PHYSIKKOMMISSION	12
Ruedi Stucki Ein schneller Szintillationszähler für den Feldeinsatz	12
Martin Lieberherr schlecht definiert	18
DEUTSCHSCHWEIZERISCHE MATHEMATIKKOMMISSION	22
Jonas Gloor Markow-Ketten als Anwendung der linearen Algebra im Unterricht	22
Andreas Nüesch Buchrezension	27
Hans Ulrich Keller Geometrische Wahrscheinlichkeit und Crofton's Theorem	28
Kursausschreibung Die Bernoulli'sche Lemniskate im Unterricht	33
WISSENSCHAFTSWETTBEWERBE	34
Lara Gafner Vier Medaillen für die Schweiz an der Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade	34
Lara Gafner Quatre médailles pour la Suisse aux Olympiades de mathématiques d'Europe centrale à Berne	35
COMMISSION ROMANDE DE PHYSIQUE	36
Didier Roulet Formation continue à Champéry, 28-29-30 septembre 2022	36
COMMISSION ROMANDE DE MATHÉMATIQUE	37
Damien Dobler Probabilités et statistique : entre théories et applications	37

Josef Züger
Präsident VSMP, praesident@vsmp.ch

Vorwort des neuen Präsidenten Message du nouveau président Prefazione del nuovo presidente

Liebe Mitglieder des VSMP,
liebe Leserinnen und Leser

An der Generalversammlung vom 25. November 2022 durfte ich von Arno Gropengiesser das Präsidium des VSMP übernehmen. Arno hat dieses Amt über Jahre innegehabt und hat in verschiedensten Projekten das Zepter in der Hand gehalten. Ich bedanke mich nochmals herzlich für die von ihm geleistete Arbeit.

Mit grossem Respekt trete ich das Amt als Präsident des VSMP an. Ich bin mir der Verantwortung gegenüber den Mathematik- und Physiklehrkräften aller Sprachgebiete der Schweiz bewusst. Ich möchte versuchen, unsere Anliegen an geeigneter Stelle, sei es gegenüber Schulen, Kantonen oder dem Bund, sei es gegenüber den anderen Fachverbänden oder dem VSG als Dachorganisation zu vertreten. Dabei kann ich auf einen erfahrenen und engagierten Vorstand zählen, für dessen Unterstützung ich mich jetzt schon bedanken möchte.

Ich wünsche Ihnen bei der Lektüre unseres Bulletins viel Vergnügen.

Josef Züger, Präsident VSMP



Chers membres de la SSPMP,
chères lectrices et chers lecteurs

Depuis l'Assemblée générale du 25 novembre 2022, j'ai repris la présidence de la SSPMP, succédant ainsi à Arno Gropengiesser. Arno a occupé cette charge de nombreuses années et a dirigé habilement différents projets. Je le remercie encore une fois chaleureusement pour le travail accompli.

C'est avec un grand respect que je prends la charge de président de la SSPMP. Je suis conscient de la responsabilité que j'ai face aux enseignant·e·s de mathématiques et de physique de toutes les régions linguistiques de la Suisse. J'aimerais essayer de défendre nos demandes que ce soit face aux écoles, aux cantons ou à la Confédé-

ration, ou encore face aux autres associations de branches ou face à la SSPES, l'organisation faitière. Pour cela, je peux compter sur un comité expérimenté et engagé, que je remercie déjà maintenant pour son soutien.

Je vous souhaite beaucoup de plaisir à la lecture de notre bulletin.

Josef Züger, Président de la SSPMP



Cari membri della SSIMF,
care lettrici e cari lettori,

in occasione dell'assemblea generale del 25 novembre 2022 ho assunto la carica di presidente della SSIMF ereditandola dal mio predecessore Arno Gropengiesser. Arno ha ricoperto questo ruolo con entusiasmo per molti anni portando avanti con successo un'ampia varietà di progetti. Vorrei ringraziarlo nuovamente per il suo importante lavoro profuso per l'associazione.

È con grande rispetto che rivesto questa nuova carica, consapevole della mia responsabilità nei confronti degli insegnanti di matematica e fisica di tutte le aree linguistiche della Svizzera. Sarà mio obiettivo rappresentare le nostre posizioni e preoccupazioni nei confronti di scuole, Cantoni e Confederazione come pure nei confronti delle altre associazioni di categoria e della SSISS come organizzazione mantello. Nel farlo potrò contare su un comitato sperimentato e impegnato che desidero ringraziare anticipatamente per il sostegno.

Nella speranza che il bollettino sia di vostro gradimento vi auguro buona lettura.

Josef Züger, presidente SSIMF

Jahresbericht VSMP/SSPMP/SSIMF 2022

Im abgelaufenen Vereinsjahr (November 2021 bis Oktober 2022) fanden – abgesehen von der Generalversammlung vom 26. November 2021 in Solothurn – wie üblich zwei Nachmittagssitzungen (am 26. Januar 2022 in Zürich und am 11. Mai 2022 in Bern) und die gleichermassen traditionelle wie ersehnte Weekendsitzung in Obergesteln (Samstag/Sonntag, 3./4. September 2022) statt. Ergänzt wurden unsere Sitzungsarbeiten durch die Mitwirkung einiger Mitglieder des Vorstandes bei verschiedenen Veranstaltungen des VSG (Verein Schweizerischer Gymnasiallehrerinnen und Gymnasiallehrer), so zum Beispiel an Präsidentenkonferenzen oder Treffen der Weiterbildungsdelegierten.

Eines der Hauptthemen, die sich der VSMP vorgenommen hat, war die Weiterentwicklung der gymnasialen Maturität WEGM, insbesondere die Revision des Maturitäts-Anerkennungsreglements MAR und die dazugehörigen Projekte zu den neuen revidierten Rahmenlehrplänen RLP. Dieses Thema war und bleibt natürlich von grosser Relevanz für die gymnasiale Ausbildung, und der Verein wollte und will seiner Stimme Gehör verschaffen.

Zu den sowohl alltagsnahen wie schulwirksamen Aktivitäten der fünf Kommissionen gehören im Normalfall einige Weiterbildungskurse und -tagungen sowie Exkursionen. Und nicht vergessen möchte ich die diversen Fachartikel, Rezensionen, Berichte und Veranstaltungshinweise in unserem «Bulletin».

Zusammensetzung des Vorstandes 2020/2021

Folgende Kolleginnen und Kollegen gehörten (samt Kommissionszugehörigkeit oder VSMP-Funktion) in der Berichtsperiode dem VSMP-Vorstand an: Samuel Byland (DPK; Webmaster und Redaktor des Bulletins), Yves Oestreicher (co-président de la CRP); Arno Gropengiesser (CMSI; présidente); Tatiana Mantuano (présidente de la CRM); Franz Meier (Sekretär); Andrea Pellegrinelli (CMSI); Yves Roisin (CRM; caissier); Luca Rovelli (présidente della CMSI); Didier Roulet (CRP); Hansjürg Stocker (DMK); Christian Stulz (DPK-Präsident); Patrick Turtschy (vice-président); Josef Züger (DMK-Präsident und VSMP-Vizepräsident).

Mutationen

- Fürs ablaufende Vereinsjahr gibt es folgende personelle Veränderung im 13-köpfigen Vorstand. Nach neun Jahren Präsidium, werde ich, Arno Gropengiesser, vom Amt des Präsidenten zurücktreten, bleibe aber noch im Vorstand als interimistischer Vizepräsident. Als neuer Präsident hat sich Josef Züger, der sich als Präsident der DMK und als VSMP-Vizepräsident bestens in den Vorstand eingebracht hat, zur Verfügung gestellt. Im Namen des

ganzen Vorstandes sei ihm herzlichst gedankt. Als neue DMK-Präsidentin begrüssen wir im Vorstand die allseits geschätzte Andrea Peter.

- Fürs neue Vereinsjahr wird Guido Lob, der das Amt von Luca Rovelli als CMSI-Präsident übernimmt, dem Vorstand neu angehören. Luca Rovelli sei an dieser Stelle nochmals herzlichst gedankt für sein Engagement sowohl als Präsident der Kommission als auch als Vorstandsmitglied. Allen neuen und bisherigen Vorstandsmitgliedern wünschen ich viel Erfolg und Genugtuung bei der Arbeit im Vorstand.
- Unser Fachverein zählt derzeit 577 Mitglieder (Stand September 2022, Vorjahr 548). Die erfreuliche Zunahme widerspricht dem langjährigen Trend: die Neumitgliedschaften kompensieren nun die hauptsächlich pensionsbedingten Austritte. Damit diese positive Bilanz andauert, will der Vorstand weiter an seine Anstrengungen anknüpfen und die entworfenen Strategien gezielt umsetzen. Die Verteilung des neuen Flyers, gekoppelt mit Aktionen der Kommissionen an ihren Weiterbildungs-Veranstaltungen, und die klassische Mund-zu-Mund-Propaganda haben vermutlich diese erfreulichen Zahlen bei den Neu-Mitgliedschaften hervorgebracht. Diese Aktionen sollen im nächsten Jahr erweitert und ausgedehnt werden (Werbe-Versand an Fachschaften und Schulen, um die direkte Werbung unter Kollegen zu fördern). Mit dem VSG und dessen Fachvereinen bzw. Kantonalverbänden sind konkrete Gespräche vorgesehen, um weitere gemeinsame und koordinierte Anstrengungen bei der Mitgliederwerbung zu realisieren. Pandemiebedingt kamen sie ins Stocken, ein neuer baldiger Anlauf ist deshalb wünschenswert.

Aktuelle Projekte

- Der VSMP wurde vom VSG gebeten, den Trägern des Projektes zur Revision des Rahmenlehrplans der gymnasialen Maturität, mögliche Lehrpersonen für die Arbeitsgruppen Mathematik und Physik zu nennen. Die beiden Vorstandsmitglieder Tatiana Mantuano und Arno Gropengiesser wurden Teil der vierköpfigen Arbeitsgruppe Mathematik. Nach einem weiteren Arbeitstreffen im April in Nottwil wurden die Vorschläge für das Grundlagenfach an einer Klausurtagung in Murten (9. und 10. September 2022) überarbeitet und angepasst. In einer Klausurwoche in Murten Ende Mai (22. – 26. 5.2023) sollen sie die endgültige Form annehmen und anschliessend (Herbst 2023) in eine letzte Vernehmlassung gehen, welche wieder die Lehrerschaft, die Fachschaften, die Schulen sowie weitere Akteure miteinbeziehen soll. Der VSMP und seine fünf Kommissionen werden sich dafür einsetzen und dafür sorgen, dass die Lehrerinnen und Lehrer

der schweizerischen Gymnasien gebührend zu Wort kommen können.

- Der VSMP hat sich im September 2022, unaufgefordert und parallel zur internen Konsultation im VSG, direkt an der Vernehmlassung zur Revision des MAR beteiligt mit einer punktuellen Stellungnahme, welche die ausführlichen Diskussionen und Überlegungen innerhalb der fünf Kommissionen und des Vorstandes zu den vorgeschlagenen Änderungen der Struktur der gymnasialen Ausbildung aufgenommen hat. Das Dokument wurde auf der VSMP-Website (vsmp.ch/aktuell/wegm/stellungnahmen) veröffentlicht.
- Weiterer Zeitplan des Projektes WEGM: Herbst 2023/Frühjahr 2024: Entscheid RLP durch EDK, Schuljahr 2024/25: Inkraftsetzung MAR.
- Bezüglich weiterer Projekte und Weiterbildungsveranstaltungen verweise ich auf die Jahresberichte der fünf Kommissionen.

VSG, ZEM CES, SMG, SPG, SCNAT und EDK

- Der Kontakt zum VSG wickelt sich vor allem über die Präsidentenkonferenzen ab, die halbjährlich angesetzt sind (in der Regel Mitte März und Mitte September). Hinzu kommt das alljährliche Präsidententreffen im Mai, das mehr dem informellen Gedankenaustausch dient und jeweils von einem Kantonalverband organisiert wird. Über die derzeit verschiedenen politischen Forderungen des VSG, die auch der VSMP aktiv unterstützt, wird regelmässig im GH informiert. Ich verweise auf die VSG-Website (www.vsg-sspes.ch) für die aktuellen, zur Diskussion stehenden, Themen.
- Als Weiterbildungsdelegierte des VSMP fungierten Patrick Turtschy und Hansjürg Stocker. Letzterer ist zudem Kontaktperson zur SCNAT (Akademie der Naturwissenschaften Schweiz) und zur SATW (Schweizerische Akademie der Technischen Wissenschaften).

- In der SMG (Schweizerische Mathematische Gesellschaft) sind Tatiana Mantuano (CRM) und Hansjürg Stocker (DMK, neu Andrea Peter DMK) die beiden Delegierten "en relation des gymnases".

Abschliessen will ich meinen Jahresrückblick mit einem aufrichtigen und grossen Dank an alle meine Vorstandskolleginnen und -kollegen. Ihr engagierter Einsatz für die Physik und Mathematik sowie den dazugehörigen Unterricht, ebenso deren äusserst konstruktive Zusammenarbeit im Vorstand über die sprachlichen und fachlichen Unterschiede hinweg – und dies kann kaum genügend unterstrichen werden – verdienen starke Anerkennung und grossen Respekt. Die allgegenwärtige freundschaftliche Atmosphäre erleichtert zudem wesentlich die Arbeit im Vorstand, sie macht sie sogar sehr angenehm.

Es war mir eine Ehre, diesem Verein über neun Jahre vorzustehen. Diesbezüglich sei hier nochmals allen Vorstandsmitgliedern und speziell den Vizepräsidenten für ihre langjährige Arbeit, für ihre immerwährende, kollegiale und freundschaftliche Zusammenarbeit ganz herzlich gedankt.

Meinem Nachfolger Josef Züger, der sich bereits vielfältig und engagiert eingebracht hat, wünsche ich viel Erfolg als neuem Präsidenten des VSMP und viel Freude an der Arbeit im mehrsprachigen VSMP-Vorstand. Den gleichen Wunsch richte ich auch an die zwei neuen Vorstandsmitglieder Andrea Peter, Neu-Präsidentin der DMK, und Guido Lob, Neu-Präsident der CMSI.

Locarno, Ende November 2022

Weiterentwicklung der Gymnasialen Maturität (WEGM) Évolution de la maturité gymnasiale (EMG) Sviluppo della maturità liceale (SML)

Stellungnahme des VSMP zum Projekt Maturitätsanerkennungsreglement (MAR)

Die Stellungnahme ist – zusammen mit weiteren Stellungnahmen zum Projekt WEGM – auf unserer Website abgelegt unter vsmp.ch/aktuell/wegm/stellungnahmen.

Prise de position de la SSPMP au projet du nouveau règlement de reconnaissance de la maturité (RRM)

Cette prise de position - avec d'autres prises de position sur le projet – sont disponibles sur notre site à l'adresse www.sspmp.ch/actualites/emg/prises-de-position.

Presenza di posizione della SSIMF sul progetto del nuovo regolamento sul riconoscimento della maturità (RRM)

Questa presa di posizione – insieme ad altre prese di posizione sul progetto – è disponibile sul nostro sito web all'indirizzo www.ssimf.ch/attualita/sml/prese-di-posizione.

Thesen zur Reform des Mathematikunterrichts an den Mittelschulen

Ein Beitrag von Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996) im VSMP-Bulletin N° 1, Januar 1966

B.L. van der Waerden

B.L. Van der Waerden trat 1951 die Nachfolge von Rudolf Fueter als Professor für Mathematik und als Direktor des Mathematischen Instituts an der Universität Zürich an. Dieser Hochschule blieb er auch nach seiner Pensionierung treu. Van der Waerden gilt als einer der führenden Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Bekanntheit erlangte er mit seinem Buch «Moderne Algebra», das 1930 erschien. In lehrbuchartiger Form präsentiert er den damals «modern» werden den Aufbau der Algebra unter strukturtheoretischen Gesichtspunkten. Inzwischen hat sich diese strukturelle Auffassung der Algebra auf die gesamte Mathematik ausgedehnt. In den neuesten Auflagen wurde demzufolge das Wort «modern» aus dem Titel weggelassen. Mehrere Generationen von Mathematikern und Physikern haben aus diesem Buch die Algebra kennen gelernt. Als Generalist war van der Waerden einer der wenigen Mathematiker, die noch die gesamte Mathematik überblicken konnten. Er erreichte bedeutende Fortschritte auch in der algebraischen Geometrie, Gruppentheorie, Zahlentheorie, Topologie, axiomatischen Geometrie, Kombinatorik, Analysis, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Ein Verzeichnis seiner Veröffentlichungen publizierte sein Schüler und späterer Kollege Herbert Gross in den «Elementen der Mathematik» (Band 28, 1973, 26 – 32).

Als Studienanfänger besuchte ich 1968 die gut besuchte und beliebte Vorlesung zur Geschichte der Mathematik, einem Thema, das van der Waerden bis ins hohe Alter beschäftigte. Seine Ausführungen zur Mathematik der Babylonier, Ägypter und Griechen faszinierten die Vorlesungsbesucher, insbesondere seine kreativen, individuellen Ansätze in der Darstellung der Materie.

Auf den schweizerischen Schulunterricht übte van der Waerden durch seine regelmässig gehaltene und beliebte Vorlesung «Mathematik für Naturwissenschaftler» einen unschätzbar grossen Einfluss aus, war doch diese Vorlesung nicht nur für Naturwissenschaftler, sondern auch für angehende Sekundarlehrer aus verschiedenen Kantonen Pflichtfach.

Wie sah der Mathematikunterricht in den 60er-Jahren aus?

Von 1960 bis 1967 war ich Schüler an der Realschule in Luzern und erwarb das Maturitätszeugnis Typus C. In der 3-jährigen Unterrealschule hatten wir 20 Lektionen Mathematik und in den 4 Jahren Oberreal-

schule 29 Lektionen. Zum Vergleich füge ich an, dass im 8-jährigen Gymnasium die Unterstufe lediglich 11 Lektionen Mathematik anbot, die 5-jährige Oberstufe 20 bis 24 Lektionen Mathematik in Abhängigkeit von den gewählten Freifächern.

Ein Blick in die damaligen kantonalen Lehrpläne für die Realschule, welche ich aus dem Archiv der Schule erhalten habe, zeigen die Vielfalt und die Bedeutung der mathematischen Ausbildung in dieser Zeit:

- Analytische Geometrie im Raum und die Integralrechnung waren Pflichtthemen.
- Komplexe Zahlen waren Teil der Algebra. Es lag in der Freiheit des Lehrers, auch eine Einführung in die Gruppentheorie zu geben.
- Zinseszins- und Rentenrechnungen wurden gefordert. Empfohlen war auch die Behandlung der Rechnungen mit Wertpapieren (Obligationen und Aktien), Diskonto- und Kontokorrentrechnungen.
- In den Lehrplänen von Luzern wurde der Geometrie besonderes Gewicht zugeteilt: 12 Stunden Algebra/Analysis, 12 Stunden Geometrie und 5 Stunden Darstellende Geometrie. In den Jahreszeugnissen wurden einzelne Noten für alle 3 Mathematikgebiete ausgewiesen. Für die jährliche Promotoren zählten bis zu 13 Noten. Die Mathematik hatte demzufolge ein grosses Gewicht.
- Speziell erwähnt wird weiter die Behandlung der formalen Logik und der verschiedenen Beweismethoden.
- In den allgemeinen Bildungszielen wird auch formuliert «Weckung des Verständnisses für den philosophischen Gehalt der Mathematik».

Die Thesen zur Reform des Mathematikunterrichts

Die nachfolgend abgedruckten Thesen mögen uns heute doch etwas speziell erscheinen, vielleicht auch Kopfschütteln erzeugen. Sie zeigen jedoch das Engagement von van der Waerden um die Vermittlung eines kompetenten Mathematikunterrichts an den Mittelschulen.

Was meinen Sie zu den Thesen?

Gerne erwarten wir Ihre Überlegungen bis Mitte März an info@vsmp.ch. Eine Veröffentlichung im Bulletin respektive auf der VSMP-Website wäre sicherlich für alle VSMP-Mitglieder von Interesse – wer weiss auch im Zusammenhang mit den neuesten Entwicklungen im WEGM-Projekt.

Thesen zur Reform des Mathematikunterrichts an den Mittelschulen

Von B.L. van der Waerden,

Allgemein

1. Die wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichtes sind:
 - A. Einführung in die Methode des wissenschaftlichen Denkens, Schulung des Denkens, Erweiterung des geistigen Horizontes.
 - B. Vorbereitung auf den Physikunterricht.
 - C. Vorbereitung der künftigen Ingenieure, Naturwissenschaftler, Mediziner und Oekonomen auf den Hochschulunterricht.
 - D. Vorbereitung der künftigen Mathematiker auf den Hochschulunterricht.
2. Bei der Auswahl des Stoffes braucht man auf das letzte Ziel D nicht zu achten. Die künftigen Mathematiker brauchen in der Schule nur das zu lernen, was auch die Ingenieure und Naturwissenschaftler lernen müssen. Alles übrige ist Sache der Hochschule. Also schalten wir von jetzt an die Mathematiker von der Betrachtung aus und denken ausschliesslich an die Nichtmathematiker.
3. Um Ziel A möglichst gut zu erreichen, muss das selbständige Denken des Schülers möglichst gefördert und der Lernstoff möglichst beschränkt werden.
4. Die Schüler müssen entlastet werden. Sie lernen stofflich mehr als zur Erreichung der Ziele B und C nötig ist, zumindest an der Kantonsschule Zürich und an der Töcherschule der Stadt Zürich. Alles was nicht unbedingt nötig ist, sollte ausgeschieden werden.

Analytische Geometrie

5. Die analytische Geometrie sollte, wenn sie überhaupt in der Schule behandelt wird, auf gerade Linien und Kreise und die Grundgleichungen der drei Typen von Kegelschnitten beschränkt werden. Tangentenberechnung, Polaren etc. sind für Nichtmathematiker unnötig.

Differential- und Integralrechnung

6. Die Differentialrechnung ist für die Vorbereitung auf die Physik wichtig: differenzieren sollte jeder lernen. Integralrechnung sollte man in der Schule nicht behandeln. Die Begriffe bestimmtes und unbestimmtes Integral sind für die meisten Schüler zu schwer, und integrieren lernt man nachher in der Hochschule.
7. Berechnung von Wendepunkten ist unnötig und sollte folglich abgeschafft werden. Die zweite Ableitung y'' braucht man überhaupt nicht. Bei der Berechnung von Maxima und Minima kommt man mit der ersten Ableitung vollständig aus. Ist sie in einem Intervall positiv, so ist die Tangente nach oben gerichtet und die Funktion nimmt zu; ist sie negativ, so nimmt die Funktion ab.

Algebra

8. Der Algebraunterricht hat als Schulung des Denkens weniger Wert als etwa Geometrie und Physik. Also sollte der Algebraunterricht beschränkt werden auf das, was die Ingenieure und Naturwissenschaftler nachher unbedingt brauchen.

Zinseszins

9. Zinseszinsrechnung sollte abgeschafft werden.

Geometrie

10. Die Grundbegriffe der Geometrie sind für die gesamte Naturwissenschaft grundlegend und auch philosophisch höchst interessant. Dazu sind sie anschaulich. Man sollte also bei der Stoffwahl die Geometrie bevorzugen.
- 10a. Insbesondere sollte die Raumgeometrie ausführlich behandelt werden. Die Schüler sollen lernen, gute Skizzen von räumlichen Gegenständen zu machen. Dafür könnte die traditionelle Darstellende Geometrie stark reduziert oder gänzlich abgeschafft werden.
11. Die Geometrie eignet sich besonders gut zur Einführung in die Methode des wissenschaftlichen Denkens, weil der Schüler hier durch eigenes Denken Lösungen von Aufgaben finden kann. Das Finden von Konstruktionen, oder das Finden der einfachsten Konstruktion (mit möglichst wenigen Kreisen und Geraden) kann als Wettbewerb in der Klasse betrieben werden.
12. Der axiomatische Aufbau der Geometrie ist als Musterbeispiel für den logischen Aufbau einer Wissenschaft von grossem erzieherischen Wert. Der axiomatische Aufbau hat sich seit Euklid auch didaktisch gut bewährt; er sollte im Prinzip beibehalten werden.
13. Man soll aber die Axiomatisierung nicht auf die Spitze treiben. Man soll nicht versuchen, ein vollständiges Axiomensystem im Sinne Hilberts aufzustellen und alle Lehrsätze rein logisch aus den Axiomen herzuleiten. Im Gegenteil: man soll die Anschauung viel stärker heranziehen als es im traditionellen Aufbau geschieht. Man soll Drehungen, Parallelverschiebungen, Spiegelungen und offenkundige Symmetrien von Figuren heranziehen, wann immer dadurch Beweise vereinfacht werden können. Was den Schülern als selbstverständlich vorkommt, z.B. dass eine Seite eines Dreiecks kürzer ist als die Summe der beiden anderen, braucht nicht bewiesen zu werden.
14. Auswendig gelernte Formeln tragen gar nichts zur Schulung des Denkens bei, daher sollte man möglichst wenige Formeln auswendig lernen.

15. Bei der Entscheidung, welche Formeln der Schüler lernen sollte und welche nicht, gibt es ein sehr einfaches objektives Kriterium. Man frage jedesmal: Ist es für den künftigen Ingenieur oder Physiker notwendig, dass er diese Formel kennt? In den meisten Fällen führt dieses Kriterium zu einer klaren Entscheidung. Zum Beispiel: Die Formel für den Flächeninhalt des Kreises muss jeder kennen. Im Fall des Kreissektors genügt es, dem Schüler die Einsicht beizubringen, dass dessen Fläche sich zur ganzen Kreisfläche verhält wie der Mittelpunktswinkel zum Vollwinkel von 360° . Er lernt also in diesem Fall nur das Prinzip, nicht die fertige Formel. Den Ausdruck für den Flächeninhalt des Kreissegmentes braucht er voraussichtlich nie; wenn er ihn doch einmal braucht, schaut er in einer Formelsammlung nach. Ähnlich in allen anderen Fällen.

Trigonometrie

16. In der Trigonometrie sollte man sich auf das Notwendigste beschränken. Definitionen der trigonometrischen Funktionen, Berechnung von rechtwinkligen Dreiecken, Additionstheoreme und Cosinusregeln sollten eigentlich genügen. Aufgaben über schiefwinklige Dreiecke wird der Schüler dadurch lösen, dass er sie in rechtwinklige zerlegt. Die Methode soll er lernen, nicht die fertigen Formeln.

Neue Lerngegenstände

17. Die Ideen der "school mathematics study group" in USA sind didaktisch schlecht begründet und haben sich in der Praxis schlecht bewährt. Hervorragende Didaktiker wie Polya haben sich scharf dagegen ausgesprochen **).
18. Die Einführung von Begriffen aus der modernen Algebra, wie Mengen und Gruppen, ist nicht zu empfehlen, weil diese Begriffe nur für Mathematiker und theoretische Physiker wichtig sind. In das exakt wissenschaftliche Denken soll der Schüler eingeführt werden, nicht speziell in das mathematische Denken. Mengen und Gruppen sind etwas spezifisch Mathematisches.
19. Die Ideen von Dieudonné und Papy sind sehr beachtenswert. Insbesondere sollte der Vektorbegriff, der in der Physik eine grundlegend wichtige Rolle spielt, auf einer möglichst frühen Stufe eingeführt werden. In Neuchâtel scheint man damit gute Erfahrungen gemacht zu haben.
20. Behandlung der Elemente der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung wäre mit Rücksicht auf die Anwendungen sehr erwünscht, stösst aber auf grosse didaktische Schwierigkeiten. In Holland hat man in einigen Klassen ein sorgfältig vorbereitetes Experiment durchgeführt. Auf Grund der Ergebnisse dieses Experimentes hat man dann aber beschlossen, die Statistik nicht als Schulfach einzuführen.

Ruedi Stucki
 ehem. Gymnasium Lerbermatt 3098 Köniz, rudolfstucki@bluewin.ch

Ein schneller Szintillationszähler für den Feldeinsatz

Einleitung

Das Projektziel war, einen Szintillationszähler für den Feldeinsatz, d.h. zur Suche von radiometrischen Anomalien in der Umwelt zu bauen. Der Zähler soll folgende Eigenschaften aufweisen:

- In Abwesenheit von spezifischen radioaktiven Quellen (d.h. dem Background BG) soll er etwa 100 cps (counts per second) zählen.
- Er soll möglichst hohe Zählraten verarbeiten können.
- Er soll eine möglichst tiefe Energieschwelle aufweisen.
- Er soll mit 5 Volt (TTL-Pegel, USB) betrieben werden können.
- Er soll eine optische Anzeige für Messwerte und Parameter enthalten.
- Er soll die Pegel auch akustisch darstellen können.
- Die Steuerung soll mit einem ARDUINO Microcontroller erfolgen.
- Die Realisation soll mit „Bordmitteln“ eines Gymnasiums, also ohne SMD-Technik sowie mit Streifen-Entwicklerprints erfolgen können.

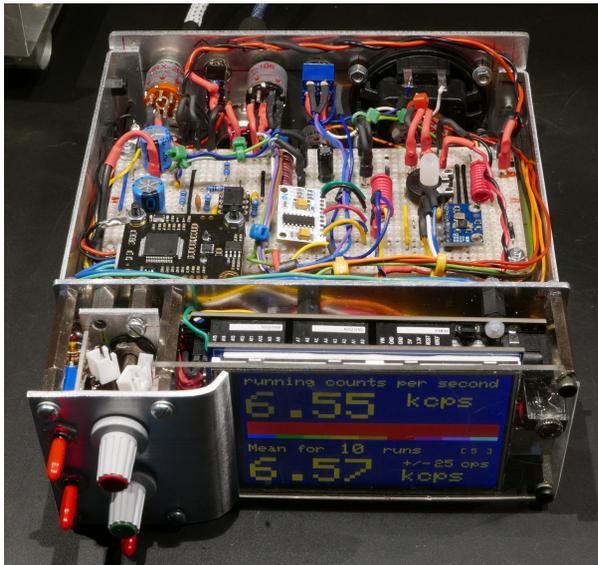


Abb. 1 Ansicht von vorne. Im Vordergrund links: Bedieneinheit, rechts: TFT-Display. Mittelgrund: Auf dem Utility-Board befindet sich links unten das Sprachmodul, in der Mitte der Class-D Audio-Verstärker und rechts der DDS Generator. Auf der Rückplatte: Anschlüsse, Lautsprecher und weitere Bedienelemente.

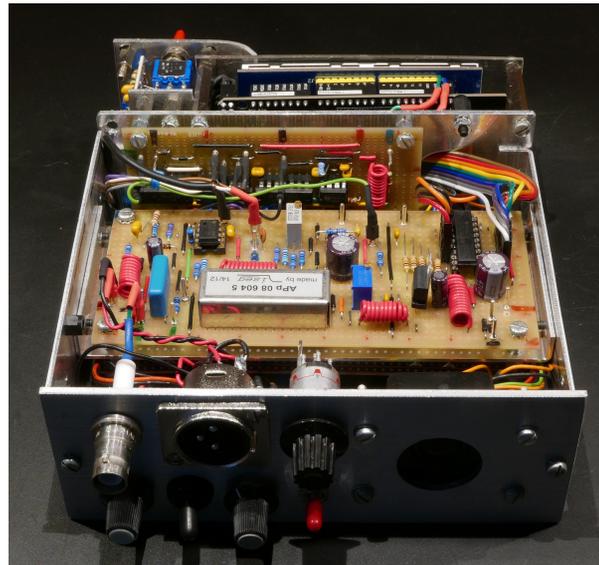


Abb. 2 Ansicht von hinten. Im Vordergrund Anschlüsse und weitere Bedienelemente. Mittelgrund: das im Text beschriebene Main-Board und weiter hinten, senkrecht stehend, der ebenfalls im Text beschriebene Dividierer. Der Chassisaufbau ist „selbst-tragend“.

Entstanden ist - in teilweise rollender Planung - ein Modell mit

- einer Impulsbreite von weniger als 1 μ sec für 662 keV-Gammas der Cs-137 Quelle und
- einer Energieschwelle zwischen 10 keV und 20 keV.
- Die optische Anzeige erfolgt mit einem 3.5" LCD-TFT Display mit 480 x 320 Pixel, das zwar den Nachteil hat, bei direktem Sonnenlicht schlecht lesbar zu sein, dafür auf einen Arduino Mega 2560 gesteckt werden kann und dazu eine Programm-Bibliothek existiert.

- Der Betrieb erfolgt mit einer ins Gehäuse integrierten Powerbank.

Es existieren vier wählbare akustische Darstellungen:

- Die direkten Impulse (verschiedener Höhen), welche mit einem Integrator von 1 μ sec auf etwa 0.1 msec „gestreckt“ und verstärkt werden.
- Mit einem Dividierer kann die Impulsrate 16, 32, 64 oder 128-fach heruntergeteilt werden; die akustischen Impulse selber sind Rechtecke der Breite 0.1 msec.
- Eine Rechteck-Schwingung, erzeugt mit dem DDS-Generator AD9833, dessen Frequenz proportional der Zählrate ist; die Grundfrequenz kann frei eingestellt werden.
- Schliesslich kann die Zählrate mittels des Sprachsynthese-Moduls DFROBOT 0760 vorgelesen werden.

Zur akustischen Verstärkung für den eingebauten Lautsprecher K50WP16 Ω von Visaton dient der Velleman VMA408 Class-D-Verstärker.

Der Einsatz eines Microcontrollers in Kombination mit dem Display erlaubt, mittels *Softkeys* diverse Möglichkeiten, wie Ringspeicher, Alarmer, Mittelwertanzeige usw. frei einzustellen (solche Programmteile sind im Moment noch nicht implementiert).

Im Folgenden wird *nur* das Herzstück, die eigentliche Zählleinheit, sowie zusätzlich der Dividierer besprochen.

Der Detektor

Als Detektor dient ein 1.5" x 3" NaI-Kristall in Kombination mit einem ADIT B38B01 Photomultiplier (PM). Mit dem Kristallvolumen von 87 cm³ können die geforderten 100 cps BG problemlos erreicht werden.

Die Einheit wurde fertig assembliert und mit einem SHV-Anschluss versehen, durch die Firma GammaSpectacular.com für USD 1200.00 erstanden.

(Dazu ein Hinweis: Der Australier Steven Sesselman entwickelt und vertreibt zu sehr interessanten Preisen solche Systeme, mit denen für verhältnismässig wenig Geld vor allem Gammaskopie betrieben werden kann. Weil der Multichannel-Analyzer (MCA) softwaremässig, d.h. mit dem Computer, realisiert wird, fällt ein sonst teures Teil in der Ausrüstung weg. Man erkaufte sich damit zwar den Nachteil, dass die Verarbeitungsrate kleiner ist, als mit einem professionellen MCA. Mit den normalerweise in den Gymnasien verwendeten Quellen spielt dies allerdings keine Rolle.)

Methodik

Zunächst wurden die Teilschaltungen soweit wie möglich mit Hilfe des Programms MULTISIM von National Instruments entwickelt und dann die realen Schaltungen auf dem Breadboard getestet. Anschliessend wurden diese Teilschaltungen zur Gesamtschaltung auf dem Breadboard integriert. Die Feinabstimmung wurde mit der realen Schaltung, den realen Impulsen des PM und mit unverzichtbarer Hilfe eines modernen digitalen Oszilloskops durchgeführt. Erst als die gesamte Kette der Schaltungen einwandfrei gestanden hatte, wurde an das Design des Mainboards gegangen.

Grundkonzept

Der PM wird mit einer HV von +800 Volt versorgt. Die Signale des PM werden mit Hilfe eines Kondensators ausgekoppelt, mit einem Operationsverstärker (OV) verstärkt, etwas differenziert und einem Komparator mit möglichst tief eingestelltem Trigger zugeführt. Weil der Arduino für die angepeilte Höchst-Zählrate viel zu langsam ist, gelangen die Ausgangs-Rechteck-Impulse auf einen schnellen Zähler und erst dieser wird jede Sekunde durch den Arduino ausgelesen.

Noch eine Bemerkung zur Zählrate, bzw. der Impulsbreite. Da die detektierten Teilchen poissonverteilt sind, können bei höheren Raten Impulse „ineinander“ liegen. Also werden eigentliche zwei Ereignisse als eines gezählt, insbesondere, wenn die Impulshöhen verschieden sind. Je kürzer die Impulse sind, desto für höhere Raten ist die detektierte der

wirklichen Rate proportional, bzw. desto kleiner ist die sogenannte *Totzeit*. In unserem Fall haben Messungen eine Linearität innerhalb von 1% bis zu einer Rate von über 20 kcps ergeben.

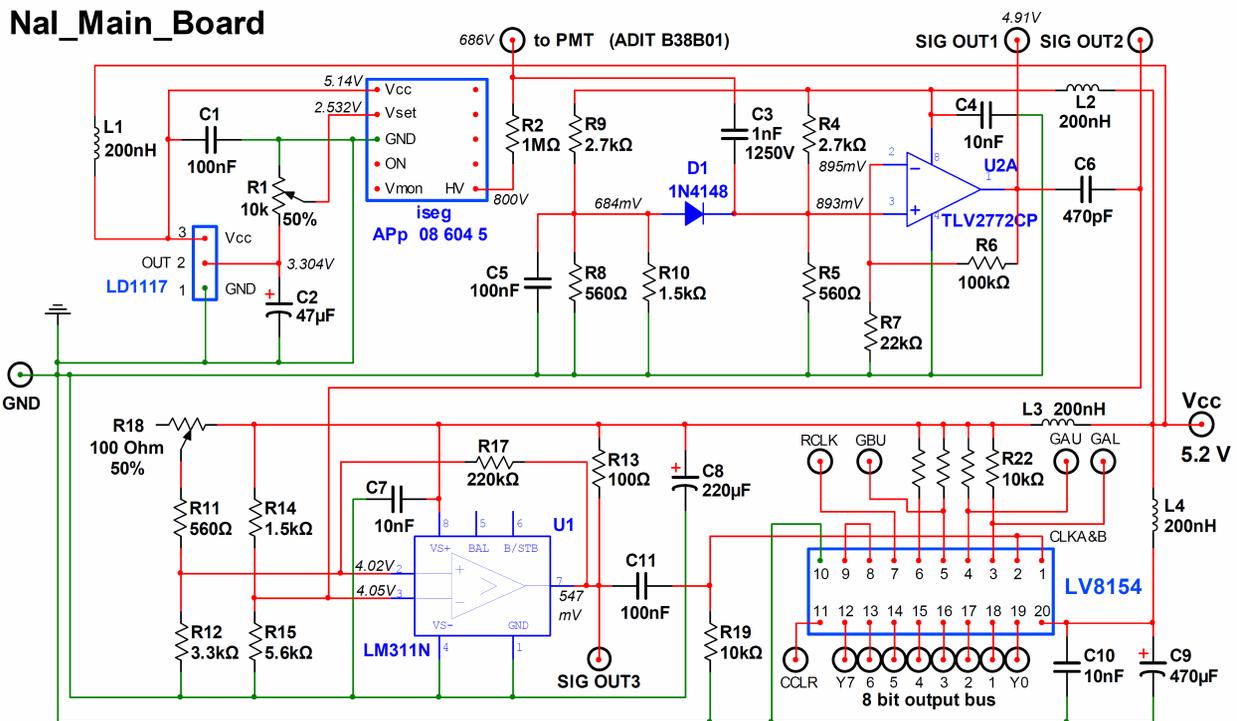


Abb. 3 Schaltschema Main-Board

Printdesign-Details

Es erschien zwecks sauberer Impulse nützlich, bei der Ausführung des Mainboards darauf zu achten, die Masseleitungen möglichst *sternförmig* zu führen, ebenso die Spannungsversorgungen. Diese wurden zusätzlich durch eine serielle Induktivität (L1 bis L4 in Abb. 3) voneinander separiert, um Übersprechen zu vermeiden. In diese Spülchen können Ferritkerne gesteckt werden, um die Induktivität zu erhöhen. Bei allen integrierten Schaltungen wurden die Vcc-Anschlüsse mit einem Keramik-Bypass-Kondensator (beispielsweise C4) von 10 nF versehen, so *nahe wie möglich* am Pin des IC platziert. Damit sollen Spannungsstörungen sowie hochfrequente Schwingungen, sogenanntes *ringing*, unterdrückt werden. Kondensatoren wurden also recht grosszügig eingesetzt! Das alles wäre vielleicht nicht nötig gewesen; jedenfalls ergeben sich aber sehr saubere Rechteckimpulse, wie Abb. 5 zeigt.

Ein Print- und Bestückungsplan kann beim Autor bezogen werden.

Beschreibung der Teile

Die **Hochspannungseinheit** in Abb. 3 links oben. Es wurde das Modul APp 086045 der Firma iseg (Kosten ca. 150 Euro) ausgewählt. Dieses kompakte Modul liefert sehr präzise Hochspannungen. Ripple/noise beträgt weniger als 10mV, was entscheidend ist, dass kleine Impulse überhaupt detektiert werden können. Der Spannungsregler LD1117 liefert eine sehr stabile 3.3V Spannung. Mit dem Präzisions-Zehngang-Trimмер R1 wird die Vset-Spannung am Modul, welche den Ausgangsspannungs-Pegel bestimmt, zwischen 0 und 2.5 Volt eingestellt (aktuell 2.532V). In unserem Fall wurde der maximal mögliche Ausgangspegel von 800 Volt gewählt, welcher über einen 1 MΩ Widerstand (R2) und via SHV-Leitung dem PM zugeführt wird. Auch in widriger und feuchter Umgebung hat sich diese HV-Versorgung als zuverlässig erwiesen, ohne Durchschläge. Daher könnte man auch eine 1000 Volt Versorgung in Betracht ziehen.

Der **Verstärker** in Abb. 3 oben rechts. Das Signal wird durch den Koppelkondensator C3 von 1 nF von der HV abgetrennt und ist ein *negativer* Impuls: naturgemäss - die Elektronen, welche auf der Anode des PM landen sind ja bekanntlich negativ geladen. Als Verstärker wurde mit dem TLV2772 ein 5.1MHz Rail-to-Rail OV gewählt, der sich zur vollen Ausnützung der 5 Volt Versorgungsspannung optimal eignet.

Der OV wird in nicht-invertierender Schaltung eingesetzt; die Gegenkopplungswiderstände R6 und R7 ergeben eine Verstärkung von 5.55. Mit den relativ niederohmig dimensionierten R4 und R5 wird an Pin 3 eine Spannung von +893 mV eingestellt, was eine Ausgangs-Ruhe-spannung von +4.91V an Pin 1 erzeugt. Die Messungen ergaben für die Impulse der 662 keV-Gammas von Cs-137 eine Amplitude von -2.56 Volt direkt am Verstärkerausgang (gelbe Kurve in Abb. 4) bzw. -1.40 Volt hinter dem Kondensator C6 (violette Kurve in Abb. 4).

Signallimitierung: Die alle paar Sekunden durch den Detektor fliegenden Müonen erzeugen grosse Signale, welche den OV übersteuern können. Dies gilt es zu vermeiden, weil ein OV nach Übersteuerung eine gewisse Zeit zur Stabilisierung braucht. Während dieser Zeitspanne können keine Impulse verarbeitet werden, was die Zählrate verfälscht. Zur Vermeidung der Übersteuerung dient die Diode D1, zusammen mit dem Spannungsteiler R8, R9 und R10 sowie C5 als Puffer. Bei zu negativen Impulsen limitiert der zunehmende Strom durch D1 die Impulsamplitude und der OV wird *nicht* übersteuert, siehe Abb.9.



Abb. 4 Ein 662 keV Impuls von Cs-137. Gelb: Impuls direkt hinter dem Verstärker (SIGOUT 1 in Abb. 3). Violett: der Impuls hinter dem Kondensator C6 (SIGOUT 2) überschwingt leicht und ergibt einen besseren *overdrive*.

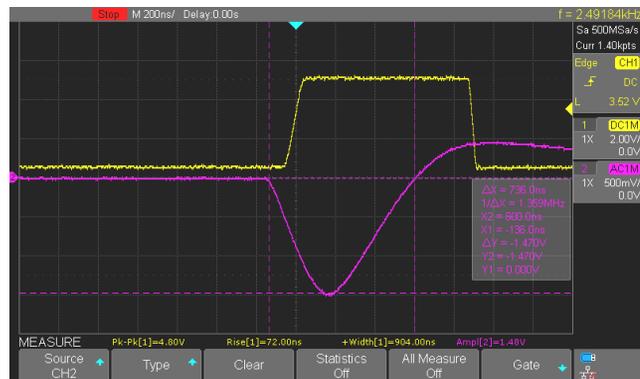


Abb. 5 Ein 662 keV Impuls von Cs-137. Violett: Impuls wie in Abb. 4. Gelb: Der Rechteckimpuls hinter dem Komparator (SIGOUT 3 in Abb. 3) ist sehr sauber und hat eine Breite von 904 nsec. Die Anstiegszeit der (linken) Flanke beträgt 20 nsec/Volt.

Der **Komparator** in Abb. 3 unten links. Die Komparatorschaltung erzeugt aus jeglichen negativen Impulsen ein positives Rechteck von einheitlich +4.9 Volt Höhe an SIGOUT 3 (genau genommen ein Trapez, man verzeihe mir die mathematische Unsauberkeit). Für die Normimpulse der 662 keV-Gammas beträgt die Rechteck-Breite ca. 900 nsec und die Steilheit der Anstiegsflanke ca. 20 nsec/Volt (gelbe Kurve in Abb. 5). Es ist also möglich, im Prinzip eine Million Impulse pro Sekunde zu zählen.

Als Komparator wurde schliesslich der altehrwürdige LM311 (Entwicklungsjahr 1973 !) gewählt. (Bemerkung: Er ist zwar schnell, aber nicht so „ultrafast“ wie ein LT1016, der heftig zu hochfrequenten Schwingungen neigt und dessen Print-Design sehr anspruchsvoll ist. Beispielsweise ist eine *ground plane* nötig und damit ein Multilayer-Print. Versuche mit dem LT1016 wurden angestellt und waren nicht erfolgreich).

Bei Komparator-Schaltungen ist es wichtig, dass die Referenzspannung möglichst schnell über- bzw. unterschritten wird, bzw. der so genannte *overdrive* möglichst rasch geschieht, damit sich saubere Signale ohne Schwingungen ergeben. Dazu dient einerseits R17 der beim Kippen des Komparators die Referenzspannung um etwa 10 mV anhebt. Andererseits wirkt der Koppelkondensator C6 in der Schaltung leicht differenzierend; das Signal SIGOUT 2 überschwingt in positive Richtung, siehe Abb. 4 und Abb. 5, violette Kurven. Beide Flanken sind steiler und somit die Spannungsänderungen grösser. Mit dem Präzisions-Zehngang-Trimmer R18 zusammen mit R11 und R12 kann die Referenzspannung

genau abgeglichen werden, aktuell bei +4.02 Volt an Pin 2. Der Spannungsteiler R14 und R15 erzeugt eine um etwa 25 mV höhere Spannung von +4.05V an Pin 3. Damit werden negative Impulse ab einer Amplitude von ca. -25 mV detektiert. Die Suche dieser empfindlichst-möglichen Einstellung geschieht mit Hilfe realer Impulse und dem Oszilloskop, die Rechtecke können an SIGOUT 3 betrachtet werden.

Der LM311 verfügt über einen sogenannten *open collector* Ausgang (Pin7), dabei ist R13 = 100Ω der möglichst niederohmige Kollektorwiderstand dafür. Das Signal gelangt über den Kopplungskondensator C11 auf den Zähler. R19 dient als pull-down-Widerstand, beides zusammen wirkt als Hochpass mit einer Grenzfrequenz von 160 Hz.

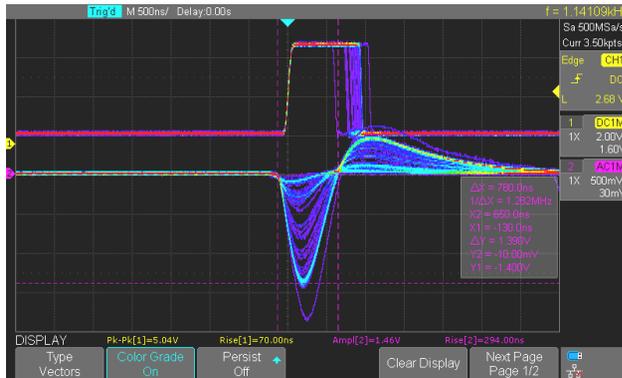


Abb. 6 Die farbverstärkte Darstellung (Color Grade) hebt Häufungen - die hellen Kurven - hervor. Die hohen Impulse (SIGOUT 2 in Abb. 3) mit einer Amplitude von -1.39 Volt stammen von den 662 keV-Gammas, die niedrigen von den Ba-X-Photonen bei 32 keV. Auch die Impulse der Backscatter-Gammas sind zu erkennen. Die Empfindlichkeit des Zählers liegt damit klar unter 32 keV.

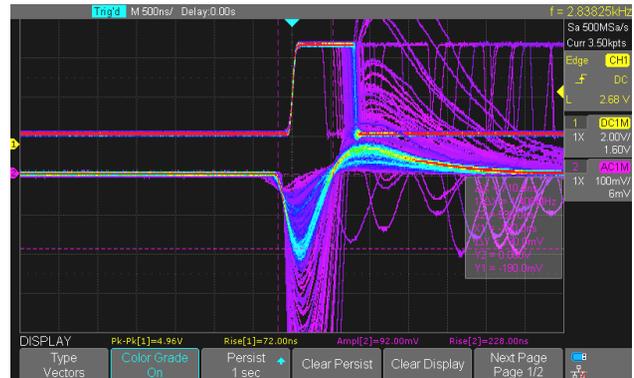


Abb. 7 Farbverstärkte Darstellung: Die 60 keV-X-Photonen von Am-241 ergeben eine Amplitude von -190 mV. (SIGOUT 2 in Abb. 3). Es sind viele Impulse zu sehen, welche von Gamma- bzw. X-Strahlung deutlich tieferer Energie stammt, insbesondere mit ca. -80 mV die Serie der 26 keV X-Photonen.

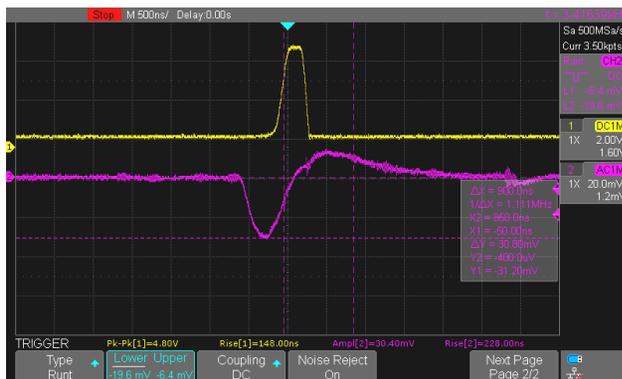


Abb. 8 Nachweisgrenze bei Impulsamplituden von ca. -30 mV (SIGOUT 2 in Abb. 3). Damit dürfte die Nachweisgrenze bei einer Energie zwischen 10 keV und 20 keV liegen.

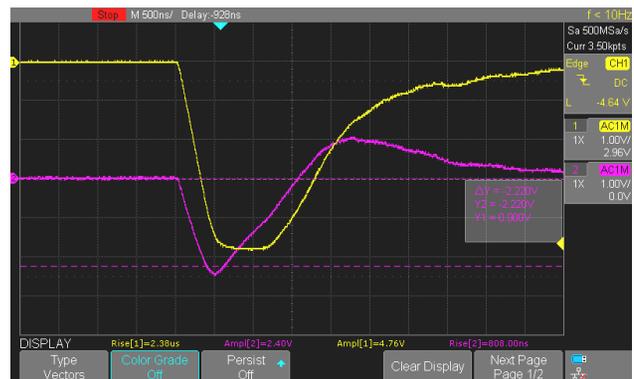


Abb. 9 Signal eines Müons. Die Impulshöhe wird auf -4.7 Volt (SIGOUT 1, gelbe Kurve) limitiert; die maximale Amplitude an SIGOUT 2 beträgt -2.4 Volt. Die Impulse sind deutlich breiter.

Der **Zähler** in Abb. 3 unten rechts. Dafür wurde der schnelle 32 Bit-Zähler LV8154 ausgewählt, welcher über einen 4 x 8 Bit Output-bus verfügt. Es werden nur 18 Bit verwendet, die höchste Zählrate beträgt damit 262'144 counts. Die Steuerung erfolgt durch den Arduino.

Die drei verwendeten Register (GAL, GAU, GBL) werden jede Sekunde ausgelesen. Eine ansteigende Flanke auf RCLK speichert die counts in ein internes Register. Anschliessend werden nacheinander GAL, GAU, GBL, auf LOW gesetzt, um das jeweilige Byte auf den Output-bus (Y0 bis Y7) zu stellen und auszulesen. (Die pull-up-Widerstände R22 sind eigentlich nicht unbedingt nötig, weil die Pins softwaremässig auf HIGH gehalten werden.) Am Schluss erfolgt ein LOW-Impuls an CCLR, um die Register zu löschen. CCLR wird ansonsten durch den Arduino auf HIGH gehalten, daher kein pull-up-Widerstand.

Nal_Divider_Board

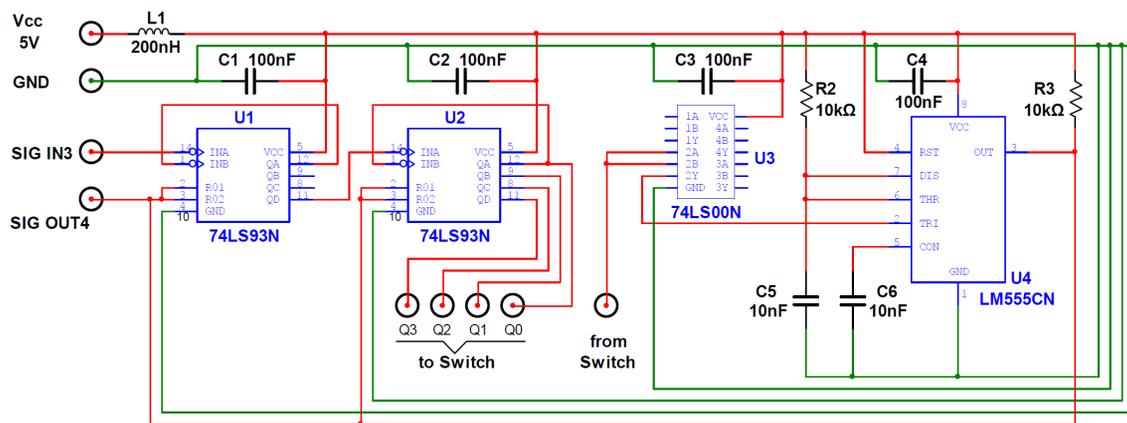


Abb. 10 Schaltschema Dividierer

Der **Dividierer**. Die Praxis hat gezeigt, dass sich die direkte Impulsrate akustisch nicht eignet, um radioaktive Quellen zu suchen; die Rate ist zu hoch. Daher musste ein Dividierer gebaut werden. Auch in diesem Fall ist der Arduino zu langsam, also ist eine diskrete Schaltung nötig.

Das Signal wird an SIGOUT 3 (Abb. 3) abgegriffen. Zum Dividieren werden (aus Restbeständen) zwei 4-bit-Zähler LS93 gemäss Abb. 10 in Reihe gestellt. Mit Hilfe eines mechanischen Drehschalters kann der Dividend 16, 32, 64 oder 128 (Q0 bis Q3) gewählt werden. Mit etwas mehr Schaltungsaufwand wäre natürlich auch eine mit Softkeys gesteuerte elektronische Wahl möglich - aber in der Praxis zu umständlich. Für die Akustik sind die 1 μ sec-Rechtecke nicht hörbar, sie müssen auf 0.1 msec gedehnt werden. Dazu dient der Timer NE555 (ebenfalls ein Veteran aus den Siebzigerjahren!). Dieser verlangt einen negativen Trigger, daher wird das gewählte Signal noch mit einem NAND-Gatter LS00 invertiert. Mit $R2 = 10\text{ k}\Omega$ und $C5 = 10\text{ nF}$ ergibt sich ein positives Rechteck der Breite 0.11 msec am SIGOUT 4 Pin. Mit diesem Signal werden einerseits die beiden Zähler zurückgesetzt (Pin 2 und 3), andererseits gelangt es via Verstärker auf den Lautsprecher. Auch beim Divider-Board wurde auf sternförmige Masse- bzw. Vcc-Leitungen geachtet und Bypass-Kondensatoren (C1 bis C4) nahe an den Bauteil-Anschlüssen eingesetzt.

Praxistest / Schlussbetrachtung

Die Feldtests verliefen durchwegs erfolgreich. Besonders bewährt haben sich bei der Suche nach Anomalien die Divider-Impulse. Zerfälle sind bekanntlich zeitlich poissonverteilt; mit „Untersetzung“ wird die Zählrate regelmässiger und kleine Ratenunterschiede sind sehr gut wahrnehmbar. Weiter müssen mit der Sprachausgabe die Messwerte nicht vom Display abgelesen werden. Es konnten an einer Stelle Zählraten bis 150 kcps (sic!) gemessen werden.

Koordinaten einiger Stellen mit Anomalien

Interessante und gut zugängliche Stellen finden sich beispielsweise ob Naters, Perimeter 642920/131200 oder beim und im Stollen bei der Massaschlucht 643589/131627. Zwischen Nendaz und Verbier gibt es viele Stellen, beispielsweise 588795/110359 oder 588776/110321 oder 588867/110231. Viele Stellen auch im Perimeter Embd-Törbel-Moosalp-Zeneggen, beispielsweise 631497/123293. In der Ostschweiz bei Tiraun (720249/178580 oder 720196/178447).

Weitere Möglichkeiten / Ausbaumöglichkeiten

Mit zwei Zählern kann eine Koinzidenzeinheit zur Demonstration der Positronen-Emissions-Tomographie (PET) oder zum Zählen von Müon-Durchgängen gebaut werden. Mittels eines GPS-Moduls könnten die Daten mit den Ortskoordinaten verknüpft und auf einer topographischen Karte dargestellt werden.

Wenn die Begriffe sich verwirren, ist die Welt in Unordnung – Konfuzius

1 Einleitung

Sprachbeherrschung wird gerne als Schlüsselkompetenz für die allgemeine Studierfähigkeit und später den Lehrerfolg bezeichnet. Während Studienabgänger meist vollständige Hauptsätze bilden können, sieht es bei Präzision, Einfachheit, Klarheit, Kürze, Prägnanz und Wortschatz oft übler aus. Die Kompetenz wächst zum Glück mit der Unterrichtserfahrung, aber einige Mängel persistieren hartknäckig.

Als Anfänger hatte ich beispielsweise von “Arbeit leisten” gesprochen. Nach ein paar Prüfungen ist mir aufgefallen, dass die Schülerinnen und Schüler chronisch Leistung und Arbeit verwechselten. Ich habe mich dann umerzogen und verwende jetzt die Kombinationen “Arbeit verrichten” und “Leistung erbringen”. Ob es was genützt hat, kann ich mangels Daten nicht behaupten, aber der Unterricht soll ja auch innere Qualitäten aufweisen. Ein anderes Beispiel ist, dass ich einfach nachgeplappert hatte, dass die Stromrechnung keine Stromrechnung sei, sondern eine Energierechnung, weil dort Kilowattstunden und nicht Ampere stehen. In einer Weiterbildung – DPK sei Dank – musste ich lernen, dass ein Strom (Fluss, Flux) “eine Grösse sei, die durch eine Fläche tritt”. Die Stromrechnung ist also einfach eine Rechnung für den *Energiefluss*. Seither spreche ich in der Einleitung immer von *elektrischem* Strom (Ladungsfluss). Ich lasse sogar einen Ladungsfluss in einen Ionenstrom umrechnen. Slang kommt automatisch, aber erst später, wenn der Kontext klar ist.

Diese Aufsatz soll sich gegen die inflationäre Verwendung des Begriffs “Definition” richten. Viele physikalische Texte setzen Definitionen – nach meiner Meinung – unpräzise, missverständlich oder sogar falsch ein.

Eine physikalische Definition ist im Wesentlichen ein Benennungsprozess. Definitionen dürfen frei gesetzt werden. Sie können deswegen nicht falsch sein, sondern sich höchstens als ungünstig herausstellen. Definitionen sollten logisch widerspruchsfrei sein, aber das betrifft mehr die Mathematik, weniger die Physik.

Ein physikalisches Gesetz ist eine quantitative Aussage über unsere Welt, die experimentell prüfbar ist. Andernfalls wäre – frei nach Wolfgang Pauli – das Gesetz “nicht einmal falsch”. Die minimale Quantität ist ein Bit: “Es gibt keine magnetischen Monopole” ist deshalb ein Gesetz.

Es existieren auch Mischformen: Das Experiment liefert $F \sim I\ell B \sin \alpha$ für die magnetische Kraft auf ein Stromelement. Indem man die Proportionalitätskonstante Eins setzt (definiert), wird die SI-Einheit der Flussdichte B festgelegt. Von solchen Fällen soll hier nicht die Rede sein, denn sie sind Allgemeingut.

2 Beispiele

Widerstand

Der absolute Widerstandswert R ist das Verhältnis von elektrischer Spannung U zu elektrischer Stromstärke I . Das ist eine Definition, denn es ginge auch umgekehrt: $G = I/U$ mit dem Leitwert G . Wir haben die Wahl und die Wahl hat keine messbaren Konsequenzen, ausser dass die Schulbücher umgeschrieben werden müssten.

Die Aussage $I \propto U$ respektive $R = \text{const}$ ist dagegen experimentell testbar. Wir sind so glücklich, wenn der einfache Sachverhalt zutrifft, dass wir ihn mit dem Namen “ohmsches Gesetz” ehren. In allen anderen Fällen (Glühlampen, Gleichrichterioden, VDR, etc.) wird es nämlich schwierig: Der Widerstandswert hängt von Strom und Spannung ab, d.h. $R = U/I$ lässt sich immer noch bilden, aber der Wert ist von geringem Nutzen.

Impuls

Definition: “Der Impuls ist das Produkt aus der Masse eines Körpers und dessen Geschwindigkeit.”

Warum ist das ungünstig? Der Lebenszweck des Impulses ist, dass er einen Erhaltungssatz erfüllt.

Leider ist die Definition «Der Impuls ist die nach dem Noether-Theorem zur Translationsinvarianz der Naturgesetze gehörende Erhaltungsgrösse.» nicht operationalisiert und für den gymnasialen Unterricht abwegig abstrakt. Aber dummerweise gilt der Ausdruck $\vec{p} = m\vec{v}$ nur für Teilchen bei kleiner Geschwindigkeit; bei hoher Geschwindigkeit müsste der relativistische Impuls $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ und für Photonen $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ verwendet werden. Eine Definition, die das Ziel nur im klassischen Grenzfall ($v = 0$) und nur für massive Teilchen erreicht, ist nicht sehr tragfähig.

Welcher Ausweg steht uns im Unterricht offen? Motivieren statt definieren! Ein paar Versuche auf der Luftkissenbahn oder mit dem Mariotte’schen Stossapparat (Kugelstosspendel) zeigen schnell, dass die Grösse mv interessant ist und dass damit – nach einigen Ergänzungen – ein Erhaltungssatz formuliert werden kann.

Newtonsche Grundgesetze

Ein Beispiel für ein Gesetz ist Newtons Lex secunda, das üblicherweise in der post-eulerschen Fassung als $\vec{a} = \vec{F}_{\text{res}}/m$ geschrieben wird. Sowohl die einwirkenden Kräfte, die zur Resultierenden kombiniert werden, als auch die Masse und die Beschleunigung können separat gemessen werden. Das Grundgesetz lässt sich testen und ist somit ein physikalisches Gesetz.

Das erste newtonsche Axiom (Trägheitsprinzip) ist hingegen kein Gesetz, sondern eine notwendige Voraussetzung, dass die folgenden zwei Gesetze überhaupt sinnvoll verwendet werden können. Es gibt durchaus Situationen, in denen kräftefreie Körper beschleunigen. Wenn wir beispielsweise in einem youtube-Film sehen, dass die Welt unmotiviert zu rotieren beginnt, wissen wir sofort, dass jemand die Kamera fallen gelassen hat. Es ist also falsch zu behaupten, dass das erste Axiom ein Spezialfall des zweiten sei. Eine Beschleunigung lässt sich erst nach der Wahl eines Bezugssystems messen und die vernünftige Wahl ist der Lebenszweck des ersten Axioms. Vielleicht müsste man die Lex prima so formulieren: “Definition: Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem, in dem kräftefreie Körper ruhen oder sich gleichmässig gradlinig bewegen. Wir beschränken uns im Folgenden auf Inertialsysteme, ansonsten könnten beschleunigte Bezugssysteme Scheinkräfte vortäuschen.”

Kreiszahl

Die Kreiszahl $\pi = U/d$ ist das Verhältnis von Kreisumfang U zu Kreisdurchmesser d . Das ist eine Definition, denn wir hätten die Freiheit gehabt, es umgekehrt zu machen oder stattdessen das Verhältnis Umfang zu Radius zu wählen. Keine dieser Definitionen führt auf einen Widerspruch.

$\pi = 3.141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ \dots = \text{const}$, aufgefasst als Aussage über unsere Welt, wäre dagegen ein Gesetz, denn es ist experimentell prüfbar. Es stellt sich als falsch heraus, denn unsere Welt ist nicht euklidisch. Eine berühmte Messung von Shapiro¹ hat gezeigt, dass Radarsignale zur Venus fast 200 μs später zurückkommen als erwartet, wenn die Venus knapp hinter der Sonne steht (obere Konjunktion). Der Bahndurchmesser ist fast 30 km grösser als $U/3.1415\dots$, wenn wir die Bahn der Einfachheit halber kreisförmig annehmen. Der Geometrie-Einführungsunterricht muss aber nicht umgestellt werden, denn die Abweichungen sind winzig: Bei kleinräumigen (≈ 1 m) Messungen an der Erdoberfläche sind etwa ab der 16. Stelle nach dem Komma Unterschiede zu erwarten.

Schwerpunkt

Sogar Feynman erreicht das Ziel manchmal nur über Umwege: Nachdem er den Massenmittelpunkt als $\vec{r}_S = m^{-1} \sum m_i \vec{r}_i$ definiert² hat, zeigt er, dass seine Definition $\vec{F}_{\text{res}} = m\vec{a}_S$ erfüllt. Das erscheint mir pädagogisch seltsam gewunden. Warum nicht den Zweck des Massenmittelpunkts nennen und dann die genannte Beziehung für \vec{r}_S herleiten? Das ist gar nicht so schwierig. Der Massenmittelpunkt sei jener Punkt eines Körpers oder Systems aus Massenpunkten, für den $\vec{p}_{\text{total}} = m\vec{v}_S$ gilt. Verwendet man $\vec{p}_{\text{total}} = \sum \vec{p}_i$ und $m = \sum m_i$, so folgt durch Integration $m\vec{r}_S = \sum m_i \vec{r}_i$, wobei die Summe über alle Massenelemente des Körpers zu erstrecken ist. Die Integrationskonstante muss verschwinden, wenn die Formel auch für einen einzelnen Massenpunkt gelten soll. Dass Impulse vektoriell addiert werden, lässt sich mit dem Gesetz der Kräfteaddition motivieren. Dass Massen addiert werden können, muss vorausgesetzt werden, denn Massen sind wegen $\Delta E = \Delta mc^2$ nicht additiv, falls Bindungsenergien freigesetzt werden. Wegen dieser Einschränkung ist die Formel $\vec{r}_S = m^{-1} \sum m_i \vec{r}_i$ für den

Massenmittelpunkt keine Definition, sondern ein Gesetz, denn sie wäre falsifizierbar.

Viele Schulbücher setzen reflexartig den Schwerpunkt gleich dem Massenmittelpunkt und bestimmen den Schwerpunkt via das Hebelgesetz im Schwerfeld. Der Massenmittelpunkt wird so gleichgesetzt mit dem Angriffspunkt der Gravitationskraft. Das ist schade, denn es ist manchmal falsch. Jener Punkt, wo die Schwerkraft angreift, heisst Gravizentrum. Jener Punkt, für den $\vec{a} = \vec{F}_{\text{res}}/m$ gilt, ist der Massenmittelpunkt. In einem homogenen Schwerfeld fallen die zwei Punkte zusammen, sonst nicht unbedingt. Der Mond wird beispielsweise durch ein Gezeiten-Drehmoment auf die Erde ausgerichtet. Der Hebelarm ist gerade der Abstand Gravizentrum-Massenmittelpunkt des Mondes. Ich erachte es als kontraproduktiv, die Konzepte “Massenmittelpunkt” (center of mass) und “Gravizentrum” (center of gravity) aktiv zu vermischen. Ich ziehe es vor, die Konzepte passiv auseinanderzuhalten, d.h. ich gehe nicht explizit auf den Unterschied ein. Beim Grundgesetz der Mechanik spreche ich von der Beschleunigung $\vec{a} = \vec{F}_{\text{res}}/m$ des Schwerpunkts (Fachwort Massenmittelpunkt), beim Gleichgewicht eines balancierten Körpers im Schwerfeld von Schwerpunkt (FW Gravizentrum). Das reicht. Und falls Schüler/-innen nachfragen, nehme ich die Einladung zur Präzisierung gerne an.

Schwingungen

“Eine mechanische Schwingung ist eine zeitlich periodische Bewegung eines Körpers um eine Ruhelage.”

“Eine Schwingung (Oszillation) ist im allgemeinen eine zeitlich periodische Änderung einer oder mehrerer physikalischen Größen in einem physikalischen System.”

Beide Zitate aus dem Internet stehen ganz am Anfang des entsprechenden Abschnitts. Sie sollen wohl definieren, was unter einer Schwingung zu verstehen ist. Die erste Definition ist zu einschränkend, schliesslich gibt es auch elektrische Schwingungen, und die zweite zu schwammig, denn sie grenzt zu wenig gegen Wellen ab. Beide Definitionen ignorieren, dass es aperiodische Schwingungen gibt. Das ist unglücklich, denn sehr viele Schwingungen sind gedämpft, d.h. nicht periodisch.

Wenn nicht ganz klar ist, was eine Schwingung sein soll, muss von einer Definition abgeraten werden. Der Ausweg heisst: Schwingungen vorführen! Es ist simpel, ein Faden- und ein Federpendel oder eine Rollschwingung zu zeigen. Wer es virtuell mag, kann eine animierte Schwingung projizieren, und so die Diskussion anstossen, ob eine Schwingung dynamisch erklärbar sein muss oder auch nur kinematisch beobachtbar sein darf.

Wellen

“Was ist eine Welle? Es gibt viele Wellenbegriffe in unserer Sprache und Objekte, die wellenförmig aussehen. Aber nur einige davon schwingen, breiten sich aus und transportieren Energie. Findest Du diese «physikalischen» Wellen?” (gefunden auf einem Ausstellungs-Plakat)

Müssen Wellen unbedingt schwingen? Wie sieht es denn aus, wenn wir neben einer Wasserwelle mitfahren? Die Wasserfläche bewegt sich nicht, aber ich würde das trotzdem noch eine Welle nennen. Müssen sich Wellen ausbreiten? Eine stehende Welle bleibt an Ort. Vielleicht ist gemeint, dass eine Welle etwas räumlich ausge dehntes sein muss, um es von einer Schwingung zu unterscheiden, aber die Formulierung ist unklar. Müssen Wellen Energie transportieren? Die Stadionwelle “La Ola” hat den Wellenbegriff schon im Namen, aber Energie wird da keinesfalls transportiert.

Auch hier wären die Autorinnen oder Autoren besser bei einigen Beispielen geblieben. Beispiele können die Phänomene, die ein Begriff umfassen soll, sehr gut mitteilen. Wir kennen Wasserwellen, elektromagnetische Wellen, Schallwellen, seismische Wellen, Temperaturwellen, chemische Wellen, Seilwellen, usw. Menschen sind gut darin, Muster zu erkennen. “If it looks like a duck, quacks like a duck and waddles like a duck, it’s probably a duck.” (J. J. Thomson bei der Entdeckung des Elektrons) Ich weiss jetzt zwar immer noch nicht, was eine Welle tatsächlich ist, aber ich kann gut leben damit.

Geschwindigkeit

“Wenn Sie mit Ihrem Personen- oder Lieferwagen einen Anhänger ziehen, dürfen Sie auf Autobahnen höchstens mit 100 km/h fahren. Der Anhänger darf nicht schwerer als 3,5 Tonnen sein und muss für diese Geschwindigkeit zugelassen sein.” (www.astra.admin.ch, 12. Oktober 2022)

“⁴Die allgemeine Höchstgeschwindigkeit von 120 km/h (Abs. 1 Bst. d) gilt ab dem Signal «Autobahn» (4.01) und endet beim Signal «Ende der Autobahn»” Artikel 4a⁴⁵ der Verkehrsregelnverordnung (fedlex.admin.ch, 12. Oktober 2022)

“Geschwindigkeit = $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ oder $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ” (aus einem bekannten Schulbuch)

Keines der Zitate lässt einen Rückschluss darauf zu, dass Geschwindigkeit eine gerichtete Grösse sein könnte. Die US-Amerikaner sind da genauer und sprechen von einem “National maximum speed limit”. Dürfen wir Geschwindigkeit als gerichtete Grösse auffassen, wenn unsere Gesetzgeber das anders handhaben?

Jedes Schulbuch steht vor dem Problem, die Alltagsauffassung von Geschwindigkeit (ungerichtet) in die wissenschaftliche Auffassung (gerichtete Grösse) zu überführen. Man kann eigentlich nur verlieren. Im Schulbuch, aus dem das Zitat stammt, wird eine Seite weiter hinten bemerkt, dass die Geschwindigkeit v der Steigung in einem s - t -Diagramm entspricht. Im einzigen Beispiel mit negativer Steigung wird dann aber mit dem Betrag von v gerechnet, d.h. die Richtung, die im Vorzeichen der Steigung steckt, gleich wieder eliminiert. Das ist geradezu kontraproduktiv.

Könnte man es besser machen? Eine billige Lösung wäre, die Richtung im Geschwindigkeitsbegriff offen zu lassen, und stattdessen, wie im Englischen, “Velozität” oder “gerichtete Geschwindigkeit” zu schreiben, wenn das so gemeint ist, und “Schnelligkeit”, “Bahngeschwindigkeit” oder “ungerichtete Geschwindigkeit”, wenn wir an Beträge denken.

Eine andere Methode wäre, die Formeln geeignet anzupassen, damit klar wird, was mit “Weg” Δs gemeint ist. Die Verwendung von s erschwert nämlich die Interpretation als gerichtete Grösse. An Hochschulen ist die Schreibweise $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T$ (velocity) respektive $v = ds/dt$ (speed) mit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ üblich. Am Gymnasium könnten wir $\bar{v}_y = \Delta y/\Delta t$ respektive $\bar{v} = \Delta s/\Delta t$ mit $\Delta s = |y_2 - y_1|$ oder gar $\Delta s = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$ schreiben. Die Schülerinnen und Schüler erkennen y sofort als Koordinate und erschrecken nicht, wenn diese Grösse negativ wird. (Ein Kollege verwendet $v = \Delta x/\Delta t$, aber ich hätte Angst vor Sätzen wie “die Zeit wird auf der x -Achse abgetragen und x auf der y -Achse”.)

3 Diskussion

Viele Definitionen aus Schulbüchern sind effektiv Gesetze, denn sie lassen sich experimentell prüfen. Im Zweifelsfall³ lasse ich einfach das Wort Definition weg; eine Umschreibung reicht meistens. Das ist ähnlich wie in der Mathematik, wo selten die Grundbegriffe (Zahl, Punkt, Gerade) definiert, sondern axiomatische Beziehungen zwischen diesen angegeben werden (Peano-Axiome, Parallelenaxiom, etc.). Man darf keine Hemmungen haben, Grundgrössen per hand-waving einzuführen, denn Unklarheiten werden später in der Anwendung eliminiert. Wir müssen nur stärker auf das Handwerker-Paradoxon vertrauen: Mit einem schlechten Werkzeug lässt sich ein besseres Werkzeug herstellen; auch mit vorläufigen Begriffen lässt sich gut Physik betreiben. Indem wir einen anfangs schwammigen Begriff laufend präzisieren und in Beziehung zu anderen Grössen setzen, schieben wir die Grenzen der Erkenntnis immer weiter hinaus. Dieser Vorgang ist auch für Schülerinnen und Schüler interessant: Sie werden beim Alltagsverständnis abgeholt und schrittweise zur naturwissenschaftlichen Denkweise hingeführt.

Take-home message

Definitionen gehören nicht an den Anfang eines Kapitels, sondern an das Ende einer Einführung. Der Zweck und der Grund einer Definition sollten stets geklärt werden.

Experimentell falsifizierbare Aussagen sollten Gesetze genannt werden.

Im Zweifelsfall lässt man es einfach offen und nennt stattdessen viele Beispiele.

¹ I. I. Shapiro, “Fourth Test of General Relativity: New Radar Result”, PRL **26** (18), 3 May 1971, 1132

² “The Feynman Lectures on Physics”, Vol. 1, p. 18-2, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963

³ Was ist beispielsweise der Status von $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$?

Jonas Gloor
Gymnasium Oberwil BL, jonas.gloor@sbl.ch

Markow-Ketten als Anwendung der linearen Algebra im Unterricht

Markow-Ketten bieten eine Reihe für den Unterricht interessante Zugänge und erlauben es, verschiedene im Schwerpunktfach behandelte Themen (lineare Algebra, Graphentheorie, Wahrscheinlichkeit oder geometrische Reihen) zu vernetzen. Für die sonst als eher trocken geltende Matrizenrechnung ergeben sich praxisnahe Anwendungen. Auch im Bulletin waren Markow-Ketten und die in diesem Artikel diskutierte *Erste Mittelwertsregel* bereits Thema: *Hans Ulrich Keller: Markow-Ketten*, [1]. (Für weitere Anwendungen und Grundlagen zur linearen Algebra für die Sekundarstufe II: *Themenheft Matrizen*, [2].)

Beispiele für Markow-Ketten sind schnell so kompliziert, dass die vorkommenden Matrizen mühsam gross sind – oder dann so einfach, dass die Prozesse elementar beschreibbar sind (vgl. Abschnitt 2). In diesem Artikel werden im Unterricht erprobte Zugänge anhand eines Beispiels beschrieben, welches zwar nicht zu kompliziert ist, gleichzeitig aber den Einsatz fortgeschrittener Methoden rechtfertigt. Die diskutierten Methoden werden alle in gängigen Lehrmitteln behandelt (z.B. *Lambacher Schweizer, Mathematik – Stochastik*, [3]), das Beispiel ist dem Autor in der Literatur nicht begegnet.

1 Fragestellung

Eine Spielfigur startet in der Mitte eines 5×5 -Schachfelds wie in Abbildung 1 zu einer Irrfahrt. In jedem Zeitschritt bewegt sich die Figur zufällig in ein Nachbarfeld, wobei auch diagonal benachbarte Felder zulässig sind. Für jedes Nachbarfeld betrage die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$. Sobald die Figur auf einem Randfeld angekommen ist, endet die Irrfahrt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p_{schwarz} landet die Figur auf einem schwarzen Randfeld?

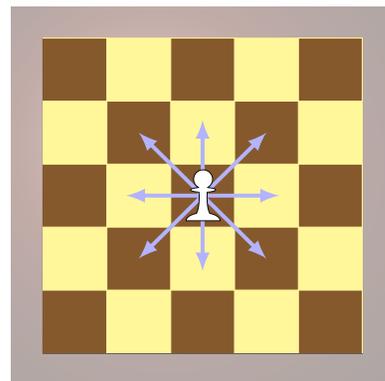


Abbildung 1: Irrfahrt auf einem 5×5 -Schachfeld

Es wird sich herausstellen, dass die Wahrscheinlichkeit für ein schwarzes Randfeld ‘nur’ rund 0.4857 beträgt, obschon es mehr schwarze als weisse Randfelder gibt.

Alleine anhand von Plausibilitätsbetrachtungen kommt man kaum zu diesem Ergebnis. Im Unterricht bietet es sich an, die Schüler:innen mit einem Zufallsgenerator viele Irrfahrten durchführen zu lassen und so schnell zu einer Stichprobe vom Umfang $n \approx 200$ zu kommen. Stärkere Aussagen, als dass $p_{\text{schwarz}} \approx 0.5$ ist, werden sich allerdings aus dieser Stichprobe wohl kaum ableiten lassen.

Ein systematischer Zugang ist daher unabdingbar.

2 Markow-Ketten im Mathematikunterricht

Markow-Ketten (hier synonym für *diskrete Markow-Prozesse*) sind eine spezielle Klasse von stochastischen Prozessen. Erste stochastische Prozesse werden im gymnasialen Mathematikunterricht in der Regel im Rahmen der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt – ohne dass diese als solche bezeichnet werden. Eine typische Aufgabenstellung lautet: Ariane und Bernd werfen abwechselnd Steinchen auf eine Blechdose. Es gewinnt, wer es als Erste(r) schafft, die Blechdose umzuwerfen. Ariane wirft die Dose bei jedem Wurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.45 um, Bernd mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.6. Ariane beginnt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p , dass Ariane gewinnt.

Üblicherweise werden solche Aufgaben mit einem Baumdiagramm untersucht. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit

ergibt sich als unendliche geometrische Reihe. In unserem Fall etwa ist

$$p = 0.45 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (0.55 \cdot 0.4)^k = 0.45 \cdot \frac{1}{1 - 0.55 \cdot 0.4} = 0.577.$$

Das Spiel lässt sich auch als Markow-Kette mit vier Zuständen auffassen.

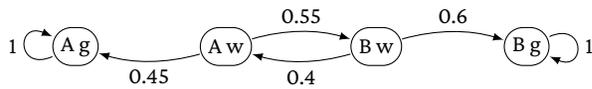


Abbildung 2: Prozessdiagramm

Der Prozess hat die beiden *transienten Zustände* ‘Ariane wirft als Nächste’ (A w) und Bernd wirft als Nächster’ (B w) und die beiden *absorbierenden Zustände* ‘Ariane hat gewonnen’ (A g) und ‘Bernd hat gewonnen’ (B g). Transient bedeutet, dass die Zustände mit Wahrscheinlichkeit 1 nur endlich oft besucht werden. Das Prozessdiagramm (Abbildung 2) ist ein endlicher gerichteter und gewichteter Graph. Die Kantengewichte entsprechen den Übergangswahrscheinlichkeiten. Die Adjazenzmatrix des Graphen ist die *Übergangsmatrix* des Prozesses:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.45 & 0 & 0.55 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Übergangsmatrix ist eine *stochastische Matrix*, d.h. die Matrix ist quadratisch, die Einträge sind allesamt nicht-negative reelle Zahlen und die Zeilensummen sind alle 1. Diverse Fragestellungen lassen sich mit Hilfe der Übergangsmatrix diskutieren. Allerdings zeigt die Berechnung der Wahrscheinlichkeit p mit Hilfe einer geometrischen Reihe, dass das Beispiel ohne Theorie über Markow-Ketten behandelt werden kann.

Unser Schachbrettbeispiel ist zwar ähnlich einfach zugänglich, lässt sich aber nicht mehr mittels elementarer Techniken wie Baumdiagrammen oder geometrischen Reihen behandeln, wie im folgenden Abschnitt klar werden wird.

3 Modellierung des Problems mit einer Markow-Kette

Wir modellieren die Irrfahrt auf dem 5×5 -Schachbrett mit einem diskreten stochastischen Prozess. Aus Symmetriegründen können die 25 Felder auf 5 Zustände reduziert werden (vgl. Abbildung 3).

Bei den Zuständen 4 und 5 endet die Irrfahrt. Solche Zustände heißen *absorbierend*. Die Zustände 1 bis 3 sind *transiente Zustände*. Gesucht ist die Absorptionswahrscheinlichkeit im Zustand 5 beim Start im Zustand 1.

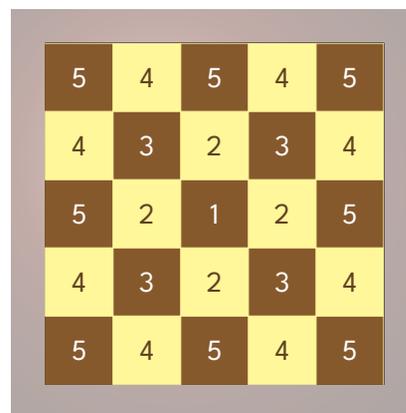


Abbildung 3: Zustände der Markow-Kette

3.1 Vom Prozessdiagramm zur Lösung des Problems mit einem Gleichungssystem

Abbildung 4 zeigt das Prozessdiagramm der Markow-Kette. Die fünf Zustände der Markow-Kette bilden die fünf Knoten des Prozessdiagramms. Die Gewichte der gerichteten Kanten sind durch die Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben:

Befindet sich die Spielfigur beispielsweise im Zustand 3, so wird sie im folgenden Schritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{8} = 0.375$ im Zustand 5 landen – daher hat die Kante $3 \rightarrow 5$ das Gewicht 0.375.

Der Ansatz, aus dem Prozessdiagramm ein Baumdiagramm zu erstellen und die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit Hilfe einer unendlichen Reihe zu berechnen, ist nicht mehr zielführend. Davon kann man sich leicht selbst überzeugen.

Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass wir ausgehend vom inneren Zustand i im Zustand 5 absorbiert werden, mit a_i , so erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.5a_2 + 0.5a_3 \\ a_2 &= 0.125a_1 + 0.25a_2 + 0.25a_3 + 0.125 \\ a_3 &= 0.125a_1 + 0.25a_2 + 0.375 \end{aligned}$$

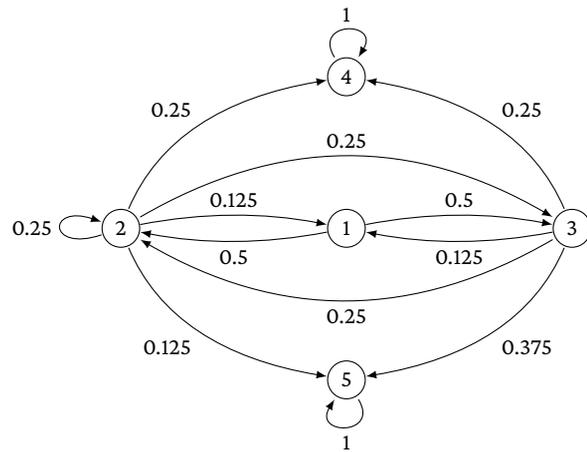


Abbildung 4: Prozessdiagramm

Die dritte Gleichung z.B. lässt sich wie folgt begründen: Sind wir im Zustand 3, so gelangen wir mit Wahrscheinlichkeit 0.375 im nächsten Schritt in den Zustand 5 (daher der Summand 0.375). Mit Wahrscheinlichkeit 0.125 aber gelangen wir in den Zustand 1 und werden anschliessend von dort mit a_1 im Zustand 5 absorbiert (daher der Summand $0.125a_1$). Schliesslich gelangen wir mit Wahrscheinlichkeit 0.25 in den Zustand 2, daher der Summand $0.25a_2$.

Nach kurzer Umformung erhalten wir die Matrix-Vektor-Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.125 & 0.75 & -0.25 \\ -0.125 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.125 \\ 0.375 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit der Lösung $a_1 = 0.4857, a_2 = 0.4286, a_3 = 0.5429$. Starten wir also in der Mitte bzw. im Zustand 1, so endet die Irrfahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 48.57% auf einem schwarzen Feld (und mit Wahrscheinlichkeit 51.43% auf einem weissen Feld).

3.2 Lösung des Problems mit der Fundamentalmatrix

Die in 3.1 diskutierte Lösung erlaubt Querbezüge zur Graphentheorie und greift auf lineare Gleichungssysteme zurück. Mit etwas fortgeschrittenen Methoden der linearen Algebra lässt sich das Problem systematischer angehen und dient als gute Grundlage für weitere Fragestellungen.

Dazu beschreiben wir die Markow-Kette mit ihrer Übergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.125 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.125 \\ 0.125 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.375 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & E \end{pmatrix} \tag{2}$$

Die blaue Teilmatrix Q beschreibt die Übergangsmatrix des transienten Teils der Kette, die rote Teilmatrix R die Absorbtionswahrscheinlichkeiten in den absorbierenden Zuständen. Unten rechts steht (grün) die Einheitsmatrix, unten links die Nullmatrix. Der Eintrag P_{ij} ist gleich der Wahrscheinlichkeit, in einem Zeitschritt vom Zustand i in den Zustand j zu gelangen.

Wir sehen, dass die 3×3 -Matrix A in der Matrix-Vektor-Gleichung (1) entsteht, wenn wir die Matrix Q von der Einheitsmatrix E subtrahieren: $A = E - Q$ bzw.

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.125 & 0.75 & -0.25 \\ -0.125 & -0.25 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.125 & 0.25 & 0.25 \\ 0.125 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Inverse dieser Matrix, $F = A^{-1} = (E - Q)^{-1}$ heisst *Fundamentalmatrix* der Markow-Kette. Im Beispiel ist

$$F = \begin{pmatrix} 1.2571 & 1.1429 & 0.9143 \\ 0.2857 & 1.7143 & 0.5714 \\ 0.2286 & 0.5714 & 1.2571 \end{pmatrix}.$$

Es kann gezeigt werden, dass die formal richtige Identität

$$F = (E - Q)^{-1} = E + Q + Q^2 + Q^3 + \dots$$

tatsächlich gilt. (Die Einträge der Matrizen Q^k streben für $k \rightarrow \infty$ gegen 0, weil die Matrix Q nur transiente Zustände beschreibt. Dass die Reihe tatsächlich konvergiert, ist damit natürlich noch nicht gezeigt.) Der Eintrag F_{ij} ist gleich dem Erwartungswert für die Anzahl Besuche im Zustand j bis zur Absorption bei Start im Zustand i .

Auch der im Gleichungssystem (1) vorkommende Vektor $(0 \ 0.125 \ 0.375)^T$ erscheint in der Übergangsmatrix P . Es ist die zum absorbierenden Zustand 5 gehörende Spalte der Matrix R . Bezeichnen wir ihn mit \vec{b} , so erhalten wir die gesuchten Absorbtionswahrscheinlichkeiten \vec{a} als Lösung der Gleichung

$$A \cdot \vec{a} = (E - Q) \cdot \vec{a} = \vec{b}.$$

Umgeformt:

$$\vec{a} = (E - Q)^{-1} \cdot \vec{b} = F \cdot \vec{b}.$$

Diese Tatsache ist als *Erste Mittelwertsregel* bekannt:

Erste Mittelwertsregel: Eine Markow-Kette habe die Fundamentalmatrix F . Weiter beschreibe der Vektor \vec{b} die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen man von einem inneren Zustand direkt in den absorbierenden Zustand i übergeht. Dann stehen im Vektor

$$\vec{a} = F \cdot \vec{b}$$

die Wahrscheinlichkeiten, dass man von den inneren Zuständen im Zustand i absorbiert wird. In unserem Beispiel erhalten wir

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0.4857 \\ 0.4286 \\ 0.5429 \end{pmatrix}.$$

Der erste Eintrag des Vektors \vec{a} ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit, dass die Irrfahrt ausgehend von Feld 1 auf einem schwarzen Randfeld endet.

Interessant ist auch die Feststellung, dass

$$\vec{a} = F \cdot \vec{b} = (E + Q + Q^2 + \dots) \cdot \vec{b}.$$

4 Ausblick

Etwas alltagsnäher ist dieselbe Fragestellung auf einem Schachbrett der ‘richtigen’ Grösse 8×8 . Das oben beschriebene Vorgehen lässt sich übertragen. Es braucht hier allerdings 14 Zustände (Abbildung 5).

Das Aufstellen der Fundamentalmatrix ist eine Konzentrations- und Fleissaufgabe, ist aber noch machbar. Man findet beispielsweise, dass die Wahrscheinlichkeit, auf einem schwarzen Randfeld absorbiert zu werden, bei einem Start auf Feld 1 gleich 0.5002 ist. Mit einem Wert von 0.5582 am grössten ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn auf Feld 11 gestartet wird.

Die hier diskutierten Beispiele lassen sich beliebig modifizieren: Es können z.B. frei nach Leonard Euler Rösselsprünge auf dem Schachbrett untersucht werden. Eine weitere mögliche Anwendung ist das Bestimmen *mittlerer Wartezeiten* (Zeitschritte bis zur Absorption auf einem Randfeld).

Zusammenfassend halten wir fest:

- Einfach verständliche Beispiele bieten verschiedene Zugänge und laden zum entdeckenden Lernen ein.
- Querbezüge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, zu geometrischen Reihen oder zur Graphentheorie ergeben sich auf natürliche Weise.
- Die vorkommenden Gleichungssysteme sind allesamt linear. Das Beschreiben der Gleichungen mit Matrizen erweist sich als vorteilhaft: Erst ein systematischer Zugang mit Matrizen führt zur Möglichkeit, Beispiele ohne aufwändigen Umweg über das Prozessdiagramm zu erfassen.
- Weitere Anwendungen der linearen Algebra ergeben sich (z.B. Adjazenzmatrizen von Graphen oder Eigenwerte stochastischer Matrizen).
- Markow-Ketten lassen sich mit Computereinsatz programmiertechnisch problemlos mit numerischen Simulationen untersuchen. Entweder kann dazu die Übergangsmatrix wiederholt auf den Ausgangszustand angewendet werden (in vielen Lehrbüchern als Iterationsmethode beschrieben) oder es lassen sich zahlreiche Irrfahrten simulieren.

In diesem Sinn möchte der Artikel als Plädoyer für den Einsatz von Markow-Ketten im Schwerpunktfachunterricht dienen.

Links

- [1] Hans Ulrich Keller, Markow-Ketten, Bulletin des VSMP, No 121, Januar 20213, S. 23 – 24
- [2] Themenheft Matrizen (wird aufs Schuljahr 2023/24 erscheinen, dmk.vsmf.ch)
- [3] Lambacher Schweizer, Mathematik – Stochastik, Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2012

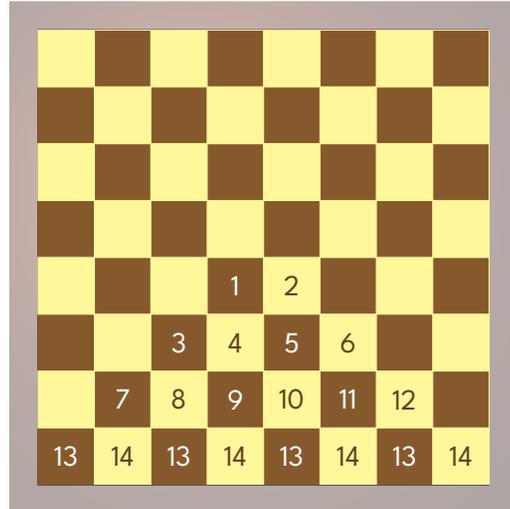


Abbildung 5: Zustände der Markow-Kette beim richtigen Schachbrett

Buchrezension

Hans Walser

Spiralen, Schraubenlinien und spiralartige Figuren

Mathematische Spielereien in zwei und drei Dimensionen

Springer Spektrum, 2022

ISBN 978-3-662-65131-5

ISBN 978-3-662-65132-2 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-65132-2>

Archimedische und logarithmische Spiralen, goldene Spiralen und vielleicht auch Schraubenlinien sind Bestandteile des gymnasialen Mathematikunterrichts, meist allerdings nur im Schwerpunktfach. Diese Kurven und ihre Eigenschaften werden von Hans Walser in den ersten Kapiteln dargestellt. Der Aufbau dieser und auch der folgenden Kapitel ist wie ein Spiel: Ausgehend von einem Thema (Archimedische Spiralen, logarithmische Spiralen, Schrauben, eckige logarithmische Spiralen, eckige archimedische Spiralen, Krümmung, Goldene Spiralen,...) wird der Faden weiter gesponnen: Ebene Spiralen werden in den Raum fortgesetzt, spiegelbildliche Spiralen werden ineinander übergeführt, durch Versetzen von Halbkreisen entstehen spiralartige Figuren, welche schliesslich zu Ornamenten werden, Schraubenlinien werden auf Zylindern und Kegeln betrachtet oder in sich verdreht zu einem Kreis gebogen. Eckige Spiralen finden sich z. B. in Dreiecken und Quadraten oder entstehen durch geschicktes Anordnen von solchen und anderen Figuren und können ausgehend vom Satz des Pythagoras erzeugt werden. Auch spiralartige Anordnungen von Zahlen generieren Spannendes.

Bei all diesen Betrachtungen werden die grundlegenden mathematischen Zusammenhänge dargestellt, Gleichungen von Kurven in parametrisierter Form angegeben. Es finden sich Bezüge zu Technik und Natur, aber auch zu klassischen Problemen der Mathematik. Immer wieder tauchen optische Täuschungen auf, welchen Hans Walser ausserdem ein eigenes Kapitel widmet. Viele Literaturhinweise ergänzen die Themenbereiche. Im letzten Kapitel *Sphärische Spiralen* stellt der Autor Bezüge zur Kartographie der Erde her. (Hier habe ich Mühe, die Resultate nachzuvollziehen und hätte gerne detailliertere Literaturhinweise.) Sachverhalte werden durch Abbildungen illustriert und mit Animationen ergänzt. (Leider ist der SN More Media App auf meinem iPhone 8 nicht brauchbar. In der Printversion werden die meisten Links nicht erkannt, oder wenn doch nur unvollständig, und die Eingabe einer Ergänzung wird nicht akzeptiert. So bleibt nur das mühsame Eintippen.)

Das Buch ist modular aufgebaut, so dass die einzelnen Kapitel unabhängig voneinander studiert werden können.

Der Autor schreibt im Vorwort: *Es (das Buch) richtet sich an Studierende, Schülerinnen und Schüler, Lehrpersonen und vor allem an interessierte Laien.* Dem kann ich zustimmen. Als (pensionierter) Lehrer fand ich viel Bekanntes aus meinem Unterricht, welches dann vom Autor gekonnt weiterentwickelt wurde und mir immer wieder überraschende Zusammenhänge aufzeigte. Für Schülerinnen und Schüler möchte ich das Buch nur bedingt empfehlen, gehören doch verschiedene Themenbereiche (parametrisierte Kurven, typische ebene Kurven, komplexe Zahlen und Abbildungen,...) nicht zum Stoff des Grundlagenfachs oder werden erst im letzten Jahr vor der Matur unterrichtet.

Fazit: Ein anregendes Buch. Sehr empfehlenswert - auch als Gutenachtlektüre!

Hans Ulrich Keller
 ehem. MNG Zürich, hukkeller@bluewin.ch

Geometrische Wahrscheinlichkeit und Crofton's Theorem

1. Zusammenfassung

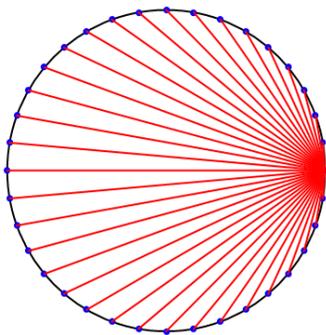
Der mittlere Abstand zweier zufälliger Punkte auf der Peripherie eines Kreises kann mit einem einfachen Integral berechnet werden. Hingegen ist es mindestens schwierig, den mittleren Abstand zweier zufälliger Punkte im Innern eines Kreises exakt zu berechnen. Hier hilft ein Konzept aus der geometrischen Wahrscheinlichkeitstheorie weiter: Das kaum bekannte Mittelwerttheorem von Morgan William Crofton (*1826, Dublin, Irland; † 1915, Brighton, England, irischer Mathematiker), der wesentliche Erkenntnisse zu dieser Theorie beigetragen hat.

Crofton's Theorem ist eine Verallgemeinerung des Theorems von Leibniz zur Ableitung eines Integrals. Es wird hier nur für den Spezialfall der Berechnung des mittleren Abstandes zweier zufälliger Punkte im Innern eines Kreises verwendet; seine Gültigkeit geht aber weit darüber hinaus.

2. Zwei zufällige Punkte auf der Peripherie eines Kreises

Wie gross ist der Mittelwert des Abstandes \bar{d} von zwei zufällig auf der Peripherie des Einheitskreises ausgewählten Punkten?

Das lässt sich mit einer Simulation angenähert berechnen. Ausgehend von einem beliebigen ersten Punkt auf dem Kreis zeichnen wir Strecken zu anderen Punkten auf dem Kreis, die in immer gleichen Abständen angeordnet sind, wie dies in Fig. 1 links für einen ersten Punkt (1, 0) wiedergegeben ist. Als 'andere Punkte' wurden hier Punkte gewählt, die je einen Zentriwinkel von 10° zu ihren Nachbarn einschliessen.



Jetzt wird der Mittelwert all dieser Strecken berechnet, was hier einen Wert $\bar{d} \approx 1.27243$ ergibt. Hätten wir einen Zentriwinkel von 0.1° gewählt, hätte sich das folgende Resultat ergeben: $\bar{d} \approx 1.27323946$. Der exakte Wert hingegen ist $\bar{d} = \frac{4}{\pi} \approx 1.27323954$. Der Wert aus der genaueren Simulation stimmt mit dem exakten Wert in erstaunlichen sieben Stellen überein!

Fig. 1: Zur 1. Simulation.

3. Exakte Berechnung von \bar{d} bei Punkten auf der Peripherie des Kreises

Dies ist mit einer einfachen Integration möglich:

Die Strecke d vom Punkt $A(1, 0)$ zu einem beliebigen Punkt $P(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt $O(0, 0)$ ist gegeben durch

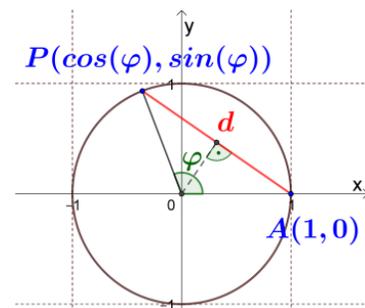


Fig.2: Zu Gl. 1.

$$d = d(\varphi) = 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad (\text{Gl. 1})$$

(s. Fig. 2). Die Integration über φ erstreckt sich von 0 bis 2π , und das Resultat muss – als Mittelwert – mit $\frac{1}{2\pi}$ normiert werden:

$$\bar{d} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[-4 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{\pi} \quad (\text{Gl. 2})$$

4. Zwei zufällige Punkte im Innern eines Kreises

Wie gross ist der mittlere Abstand \bar{d} zweier zufällig ausgewählter Punkte im Innern eines Kreises? Dies lässt sich näherungsweise am einfachsten wiederum mit einer Simulation herausfinden. Wir wählen zwei Punkte A und B, beide mit Zufallskoordinaten für ihre x- und y-Werte zwischen -1 und 1. Beide Punkte müssen innerhalb des Kreises liegen, weshalb nur solche Punktepaare $A(u, v)$ und $B(p, q)$ berücksichtigt werden, für die sowohl $u^2 + v^2 \leq 1$ als auch $p^2 + q^2 \leq 1$ ist. In der nebenstehenden Figur 3 sind 40 solche Strecken eingezeichnet. Von diesen wird der Abstand

$$\overline{AB} = d = \sqrt{(u-p)^2 + (v-q)^2} \quad (\text{Gl. 3})$$

aufsummiert; der mittlere Wert \bar{d} ergibt sich dann als Quotient aus der Summe all dieser Abstände und der Anzahl der zulässigen Paare.

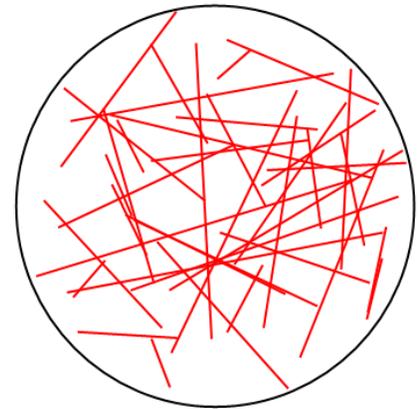


Fig. 3: Zufallsstrecken.

```
anz = 1000000; s = 0; ok = 0;
For [k = 1, k <= anz, k++,
  u = RandomReal[{-1, 1}];
  v = RandomReal[{-1, 1}];
  p = RandomReal[{-1, 1}];
  q = RandomReal[{-1, 1}];
  If[u^2 + v^2 <= 1 && p^2 + q^2 <= 1,
    d = Sqrt[(u - p)^2 + (v - q)^2];
    s = s + d;
    ok++;];];
Print[{ok, s / ok}]
{617440, 0.904802}
```

Fig. 4: Zur 2. Simulation.

Dieses Vorgehen wurde mit dem links in Fig. 4 wiedergegebenen Programm mit einer Million Punktepaare durchgeführt, von denen 617'440 zulässigen Paaren entsprechen. Die so ermittelte Länge des mittleren Abstands \bar{d} ist etwa 0.9048.

Alternativ kann der Kreis auch mit einem genügend feinen kartesischen Gitternetz überzogen und der mittlere Wert der Abstände aller Gitternetzpunkte voneinander berechnet werden, was zu einer ähnlich guten Näherung führt. Diese Werte liegen um weniger als 0.1 % neben dem exakten Wert

$$\bar{d} = \frac{128}{45\pi} \approx 0.905415 \quad (\text{Gl. 4}).$$

5. Exakte Berechnung von \bar{d} mit Punkten im Innern des Kreises

Wie aber wurde dieser **exakte** Wert \bar{d} bestimmt? Dazu muss für den Einheitskreis das folgende Vierfachintegral gelöst werden:

$$\bar{d} = \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [x_1^2 + y_1^2 \leq 1 \wedge x_2^2 + y_2^2 \leq 1] \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \quad (\text{Gl. 5}),$$

mit der Iverson-Konvention, dass [...] gleich 1 ist, wenn die Bedingung ... wahr ist, und sonst 0.

In Polarkoordinaten wird dies

$$\bar{d} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 r_1 \cdot r_2 \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} dr_1 dr_2 d\varphi_1 d\varphi_2 \quad (\text{Gl. 6})$$

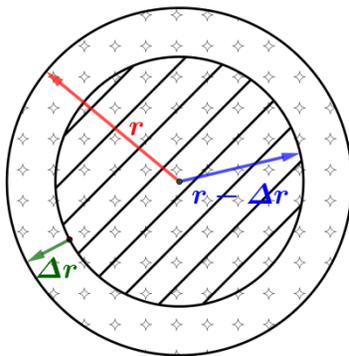
Beide diese Vierfachintegrale entziehen sich einer einfachen exakten Berechnung.

Hier hilft Crofton's Mittelwerttheorem weiter:

Dazu betrachten wir zwei konzentrische Kreise mit Radien r respektive $r - \Delta r$, entsprechend der Figur 5.

Die zugehörigen Flächen werden hier mit $A_r = \pi \cdot r^2$, $A_{r-\Delta r} = \pi \cdot (r - \Delta r)^2$ und mit

$$\Delta A = A_r - A_{r-\Delta r} \approx 2\pi \cdot r \cdot \Delta r \text{ bezeichnet.}$$



Mit $\bar{d} = E(d_r)$ wird nun der gesuchte Erwartungswert des Abstandes zweier Zufallspunkte im Innern eines Kreises mit Radius r bezeichnet, mit $E(d_{r-\Delta r})$ der entsprechende Erwartungswert im Innern eines Kreises mit Radius $r - \Delta r$, und mit $E(d_{\Delta r})$ der Erwartungswert des Abstandes von Punkten in ΔA zu Punkten in $A_{r-\Delta r}$.

Fig. 5: Bezeichnungen am Kreis.

Wir nehmen an, dass $0 < \Delta r \ll r$ ist, so dass beim Grenzübergang $\Delta r \rightarrow 0$ der Term Δr durch das Differential dr ersetzt werden kann, und dass höhere Potenzen von Δr vernachlässigt werden können. Unter Verwendung von bedingten Wahrscheinlichkeiten gilt dann angenähert:

$$E(d_r) \approx E(d_{r-\Delta r}) \cdot W(P_1 \text{ und } P_2 \in A_{r-\Delta r}) + E(d_{\Delta r}) \cdot (W(P_1 \in A_{\Delta r} \text{ und } P_2 \in A_{r-\Delta r}) + W(P_2 \in A_{\Delta r} \text{ und } P_1 \in A_{r-\Delta r})) \quad (\text{Gl. 7})$$

Jetzt verwenden wir weiter, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Punkt in einer Fläche A ist, proportional zu dieser Fläche A ist. Damit ergibt sich:

$$E(d_r) \approx E(d_{r-\Delta r}) \cdot \left(\frac{A_{r-\Delta r}}{A_r}\right)^2 + E(d_{\Delta r}) \cdot 2 \cdot \left(\frac{A_{r-\Delta r} \cdot A_{\Delta r}}{A_r^2}\right) \approx E(d_{r-\Delta r}) \cdot \left(\frac{\pi \cdot (r - \Delta r)^2}{\pi \cdot r^2}\right)^2 + E(d_{\Delta r}) \cdot 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot (r - \Delta r)^2 \cdot 2\pi r \cdot \Delta r}{\pi^2 \cdot r^4}\right) \quad (\text{Gl. 8})$$

Bei Vernachlässigung von höheren Potenzen von Δr vereinfacht sich der Term $\left(\frac{\pi(r - \Delta r)^2}{\pi \cdot r^2}\right)^2$ zu $1 - \frac{4 \cdot \Delta r}{r}$ (Gl. 9), und der Term $2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot (r - \Delta r)^2 \cdot 2\pi r \cdot \Delta r}{\pi^2 \cdot r^4}\right)$ wird zu $\frac{4 \cdot \Delta r}{r}$ (Gl. 10). Mit all diesen Vereinfachungen, und nach Subtraktion von $E(d_{r-\Delta r})$ auf beiden Seiten, ergibt sich

$$E(d_r) - E(d_{r-\Delta r}) = -E(d_{r-\Delta r}) \cdot \frac{4 \cdot \Delta r}{r} + E(d_{\Delta r}) \cdot \frac{4 \cdot \Delta r}{r} \quad (\text{Gl. 11})$$

Nach der Division durch Δr und dem Übergang zum Grenzwert $\Delta r \rightarrow 0$, und unter Berücksichtigung, dass im Grenzfall $E(d_r) \approx E(d_{r-\Delta r})$ wird, ergibt sich

$$\frac{dE(d_r)}{dr} + \frac{4}{r} E(d_r) = \frac{4}{r} \cdot E(d_{\Delta r}) \quad (\text{Gl. 12})$$

Hier fehlt noch die Berechnung von $E(d_{\Delta r})$. Dafür gilt (s. Fig. 6):

$$E(d_{\Delta r}) = \frac{2}{\pi \cdot r^2} \int_0^\pi \int_0^r \sqrt{r^2 + x^2 - 2 \cdot r \cdot x \cdot \cos(\vartheta)} \cdot x \, dx \, d\vartheta \quad (\text{Gl. 13})$$

Es ist einfacher, dieses Doppelintegral in Polarkoordinaten mit dem Ursprung in $(r, 0)$ zu berechnen (s. nochmals Fig. 6):

$$E(d_{\Delta r}) = \frac{2}{\pi \cdot r^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2r \cos(\varphi)} \rho^2 \, d\rho \, d\varphi = \frac{32r}{9\pi} \quad (\text{Gl. 14})$$

Setzt man dieses Resultat in Gl. 12 ein, ergibt sich:

$$\frac{dE(d_r)}{dr} + \frac{4}{r} E(d_r) = \frac{128}{9\pi} \quad (\text{Gl. 15})$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung für den gesuchten Wert von $E(d_r)$. Statt eines mühsamen Vierfachintegrals erhalten wir eine einfache Differentialgleichung!

Berücksichtigen wir weiter, dass $E(d_{r=0}) = 0$ ist, erhalten wir sofort

$$E(d_r) = \frac{128 r}{45\pi} \approx 0.905415 r \quad (\text{Gl. 16})$$

6. Ausblick

Die hier vorgestellten Ideen zur geometrischen Wahrscheinlichkeit lassen sich auf n -dimensionale Räume übertragen. So kann z. B. der Erwartungswert des Abstandes von einem Pol einer gewöhnlichen Kugel mit Radius r zu zufälligen Punkten im Innern dieser Kugel zu $E(\bar{d}_{\Delta r}) = \frac{6}{5} r$ berechnet werden, womit sich – unter Verwendung des Theorems von Crofton – der Erwartungswert einer Zufallsstrecke in einer Kugel zu $E(\bar{d}_r) = \frac{36}{35} \cdot r \approx 1.0285714 r$ ergibt. Die Erwartungswerte $E(\bar{d}_r)$ in Hyperkugeln (mit $n > 3$) sind ebenfalls alle bekannt. Weiter lässt sich die Theorie bei beliebigen konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^n anwenden.

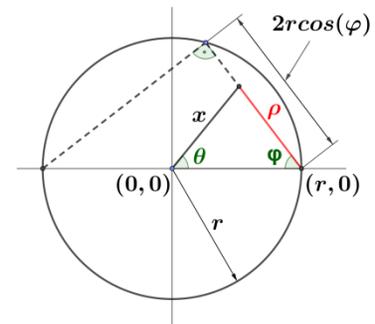


Fig. 6: Zu Gl. 13 und 14.

7. Literatur

- Eine ausführliche Darstellung dieses Problems und seiner Lösung findet sich, für beliebige konvexe Teilmengen des n -dimensionalen Euklidischen Raums, unter dem Titel 'The average distance between two points' von Bernhard Burgstaller und Friedrich Pillichshammer in Bull. Aust. Math. Soc. 80 (2009), 353–359 doi:10.1017/S0004972709000707; eing. 19. Mai 2008.
- Ein Beweis für das spezielle Resultat beim Kreis ist bei S. R. Dunbar, 'The average distance between points in geometric figures', College Math. J. 28 (1997), 187–197, wiedergegeben.
- Herbert Solomon 'Geometric Probability', (CBMS–NSF Regional Conference in Applied Mathematics, vol. 28), Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1978. Das Buch dazu: 'Geometric Probability'; SIAM, 1978; ISBN 0898710251, 9780898710250.
- H.U. Keller 'Wie lang ist eine Zufallsstrecke?'; Didaktik der Mathematik, 16 (1988) 1, S. 19-31.

Die Bernoulli'sche Lemniskate im Unterricht



Die faszinierende Bernoulli'sche Lemniskate kann in vielen verschiedenen Gebieten des üblichen Mathematikunterrichts eingesetzt werden. Sie kann im Laufe des Curriculums in unterschiedlichen Zusammenhängen immer wieder von neuem erstrahlen. Wir beginnen diesen Kurs rein geometrisch: Mit Hilfe von GeoGebra entdecken wir die Lemniskate. Danach folgen bereichernde Übungen in der Algebra, in der Trigonometrie, in der Analysis, ..., welche rund um diese schöne Kurve im Mittelschulunterricht auftauchen können.

Referent:	Juan Läuchli, Kantonsschule Frauenfeld
Zielpublikum:	Mathematik-Lehrkräfte der Sekundarstufe II
Organisation:	Prof. Dr. Norbert Hungerbühler (ETH), Jonas Gloor (DMK)
Datum und Zeit:	Mittwoch, 29. März 2023, 9:30 Uhr – 16:00 Uhr Ab 9:00 Begrüssungskaffee
Kursort:	ETH Zürich
Kurskosten:	Fr. 200.- (inkl. Mittagessen und Kaffeepausen) Fr. 150.- für VSMP-Mitglieder und Studierende
Anmeldung: Anmeldeschluss:	https://math.ch/DMK2023a/ 19. März 2023



Lara Gafner

Wissenschafts-Olympiade, l.gafner@olympiad.ch

Vier Medaillen für die Schweiz an der Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade

Vom 25. bis 31. August 2022 war der Mathematik-Nachwuchs Europas in Bern zu Gast. 60 Jugendliche aus Deutschland, Kroatien, Litauen, Österreich, Polen, Slowenien, Tschechien, Ungarn, der Slowakei und der Schweiz kämpften an der Mitteleuropäischen Mathematik-Olympiade (MEMO) um Medaillen, wanderten durch die Berge und naschten Schweizer Schokolade.

Die Schweizer Teilnehmenden holten im «Heimspiel» gleich vier Medaillen: Jonah Osterwalder (17) vom Gymnase de Renens (VD) gewann Silber. Drei Bronzemedailles gingen an Jerry Schupp (17) von der Kantonsschule Wettingen (AG), Evelyn Ebnetter (16) vom Gymnasium Oberwil (BL) und Mohamed Bouchouata (17) vom Gymnase français de Bienne. Yaël Arn (17) vom Gymnasium Bäumlhof (BS) wurde mit einer Ehrenmeldung ausgezeichnet. Ausserdem mit dabei war Anna Kokorich (16) vom Collège Champittet de Pully (VD).

Mathematik für Teamplayer

Die Mitteleuropäische Mathematik-Olympiade hat vieles gemeinsam mit der grösseren Internationalen Mathematik-Olympiade, doch in einem Punkt ist sie einzigartig: Die Jugendlichen werden nicht nur einzeln, sondern auch im Team bewertet. Am Samstag hatten die Jugendlichen fünf Stunden Zeit, um alleine vier Aufgaben aus den Bereichen Algebra, Geometrie, Kombinatorik und Zahlentheorie zu lösen. Am Sonntag mussten die Teilnehmenden jedes Landes gemeinsam acht Aufgaben lösen, ebenfalls während fünf Stunden. Das beste Resultat erzielte das polnische Team, dessen Erfindergeist sich bereits spürbar machte, als sie kurz nach ihrer Ankunft in Bern den Speisesaal des Hostels mit komplexen Bauklotz-Konstrukten schmückten. Das Erfolgsrezept sehen die polnischen Teamleiter Jadwiga Czyżewska und Konrad Majewski im Zusammenhalt der sechs Jugendlichen: «Sie haben auch ausserhalb des Wettbewerbs gerne Zeit miteinander verbracht und sich immer etwas einfallen lassen». Die Schweiz landete zwar nicht auf dem Podest, doch für Jerry war der Teamwettbewerb dennoch das Highlight der Woche: «Wir haben in den letzten fünf Minuten noch rasch ein Problem gelöst, das sonst nur zwei andere Teams knacken konnten!»

Muster und Strukturen

Wer im Einzelkampf gut abschnitt, wurde mit einer Medaille geehrt. Die Goldmedaillen gingen an Schülerinnen und Schüler aus Deutschland, Ungarn und Polen. Die Deutsche Réka Wagener hat es mit ihrer perfekten Punktezahl auf den ersten Platz der individuellen Rangliste geschafft. Sie lebt in der Mathematik gerne ihre Kreativität aus: «Man kann Muster fin-

den, man kann ausprobieren, es gibt nicht immer ein festes Lösungsschema.» Auch der Schweizer Silbermedaillist Jonah kommt ins Schwärmen, wenn es um sein Lieblingsfach geht: «Mathematik ist so rein, alles geht auf und ist so gut strukturiert und zugleich voller Überraschungen». Nach der Matura will er Mathematik an der EPFL studieren. Evelyn, deren Hoffnungen auf eine Bronzemedaille in Erfüllung gingen, hat noch einige Schuljahre vor sich, in denen sie erneut an der Mathematik-Olympiade teilnehmen will.

Talentförderung mit einem Hauch Tourismus

Wenn sie nicht gerade damit beschäftigt waren, mathematische Beweise aufzustellen, blieb den jungen Talenten Zeit, das Gastgeberland Schweiz zu entdecken. Am ersten Tag wurden sie mit typischen Schweizer Snacks und einer Schnitzeljagd in der Berner Altstadt begrüsst. Bei der Eröffnungszeremonie im Gymnasium Lerbermatt wurde gejodelt. Nach den Prüfungen fanden eine Schifffahrt auf dem Thunersee, eine Wanderung auf dem Niederhorn und ein Ausflug ins Emmental statt. Der ganze Event wurde von jungen Freiwilligen organisiert, neben Arbeit, Forschung und Studium. Viele von ihnen haben selbst einmal an einer Mathematik-Olympiade teilgenommen und wissen aus eigener Erfahrung, wie wichtig Erfolgserlebnisse und der im Alltag oft fehlende Austausch mit Gleichgesinnten für begabte Jugendliche sind. Für sie sei es eine anstrengende Woche gewesen, gibt die MEMO-Organisatorin und EPFL-Doktorandin Jana Cslovjecsek zu. «Aber ich habe die Momente sehr genossen, in denen ich gemerkt habe: Jetzt haben gerade alle Spass.»



Die seit 2006 existierende MEMO hat zum zweiten Mal in der Schweiz stattgefunden. 2012 war der mathematische Nachwuchs in Solothurn zu Besuch. Da sich die zehn teilnehmenden Länder abwechseln, ist das olympische Feuer dieses Jahr erneut in der Schweiz angekommen. Die MEMO 2022 wurde finanziell unterstützt von den Cogito- und Ernst-Göhner-Stiftungen, SwissMAP, der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Zürich, der Universität Zürich und der Conza-Stiftung. Das Gymnasium Lerbermatt und die Universität Bern stellten Räumlichkeiten zur Verfügung.

Lara Gafner

Olympiades de la science, l.gafner@olympiad.ch

Quatre médailles pour la Suisse aux Olympiades de mathématiques d'Europe centrale à Berne

Les jeunes mathématicien-nes européen-nes étaient à Berne, ville hôte, du 25 au 31 août 2022. Aux Olympiades de mathématiques d'Europe centrale (MEMO), les 60 jeunes participant-es d'Allemagne, de Croatie, de Lituanie, d'Autriche, de Pologne, de Slovénie, de Tchéquie, de Hongrie, de Slovaquie et de Suisse se sont disputé des médailles, ont découvert les montagnes en randonnée et savouré le chocolat suisse.

Les participant-es suisses ont remporté quatre médailles lors de ces "jeux à domicile": Jonah Osterwalder (17 ans) du gymnase de Renens (VD) a gagné l'argent, tandis que Jerry Schupp (17 ans) de l'école cantonale de Wettingen (AG), Evelyn Ebnetter (16 ans) du gymnase d'Oberwil (BL) et Mohamed Bouchouata (17 ans) du gymnase français de Bienne ont remporté une médaille de bronze chacun-e (3 au total). Yaël Arn (17 ans) du gymnase de Bäumlhof (BS) a reçu une mention d'honneur. Anna Kokorich (16 ans), du collège Champittet de Pully (VD), faisait également partie de l'équipe.

Les mathématiques dans un esprit d'équipe

Les Olympiades de mathématiques d'Europe centrale ont beaucoup en commun avec leur grande sœur, les Olympiades internationales de mathématiques, mais sont uniques sur un point: les jeunes ne sont pas seulement évalué-es individuellement, mais aussi en équipe. Le samedi, les participant-es avaient cinq heures pour résoudre seul-es les quatre épreuves d'algèbre, de géométrie, d'analyse combinatoire et de théorie des nombres. Le dimanche, les participant-es de chaque pays devaient résoudre huit épreuves en cinq heures également. Le meilleur résultat a été réalisé par l'équipe polonaise, dont l'esprit inventif était déjà perceptible lorsque, peu après son arrivée à Berne, elle a décoré la salle-à-manger de l'auberge de jeunesse avec des constructions complexes composées de blocs en bois. Les responsables de l'équipe polonaise Jadwiga Czyżewska et Konrad Majewski attribuent ce succès à la cohésion entre les six jeunes: "Nos participant-es ont passé beaucoup de temps ensemble en dehors du concours et trouvent toujours quelque chose à inventer". La Suisse n'a certes pas atteint le podium, mais le concours en équipe a été le point fort de la semaine pour Jerry: "Dans les cinq dernières minutes, nous avons encore rapidement résolu un problème que seules deux autres équipes ont réussi à dé-

nouer!"

Schémas et structures

Les participant-es qui se sont bien distingué-es durant les épreuves individuelles ont été récompensé-es par une médaille. Les médailles d'or ont été remportées par des élèves d'Allemagne, de Hongrie et de Pologne. L'Allemande Réka Wagener a remporté la première place au classement individuel avec un nombre de points parfait. Elle aime exprimer sa créativité dans les mathématiques: «On peut trouver des schémas, faire des expériences et il n'y a pas toujours de solution toute faite.» Le gagnant de la médaille d'argent suisse Jonah est lui aussi enthousiaste lorsqu'il parle de sa branche préférée: «Les mathématiques sont si purs, tout s'enchaîne et est si bien structuré, et en même temps, il y a toujours des surprises». Après la maturité, il souhaite étudier les mathématiques à l'EPFL. Evelyn, dont les espoirs d'une médaille de bronze ont été comblés, a encore plusieurs années d'école devant elle durant lesquelles elle souhaite renouveler sa participation aux olympiades de mathématiques.

Promotion des talents avec une touche de tourisme

Lorsqu'ils/elles n'étaient pas occupé-es à résoudre des problèmes mathématiques, les jeunes talents ont eu du temps pour découvrir la Suisse, pays hôte. Le premier jour, ils/elles ont pu goûter des collations typiques suisses et se lancer dans une chasse au trésor dans la vieille-ville de Berne. La cérémonie d'ouverture au gymnase de Lerbermatt a été marquée par des chants de yodel. Après les examens, les participant-es ont été invité-es à faire un tour en bateau sur le lac de Thoun, une randonnée sur le Niederhorn et une excursion enEmmental. L'ensemble des activités a été organisé par des jeunes bénévoles - en dehors du travail, de la recherche et des études. Bon nombre d'entre eux/elles ont déjà participé à des olympiades de mathématiques et savent, par leur propre expérience, combien ces moments de succès et cet échange avec d'autres passionné-es - qui souvent manque au quotidien - sont importants pour les jeunes talents. L'organisatrice des MEMO et doctorante à l'EPFL Jana Cslovjecsek admet que la semaine a été éprouvante pour elle. «Mais j'ai beaucoup apprécié les moments durant lesquels j'ai remarqué que tout le monde s'amusait.»

Les MEMO ont lieu pour la deuxième fois en Suisse depuis leur création en 2006. En 2012, la relève en mathématiques s'était retrouvée à Soleure (article en allemand). Comme les dix pays participants se relaient, la flamme olympique s'élèvera cette année à nouveau en Suisse. MEMO 2022 bénéficie du soutien financier des fondations Cogito et Ernst-Göhner, de SwissMAP, de la Faculté des sciences de l'Université de Zurich, de l'Université de Zurich et de la fondation Conza. Le Gymnase Lerbermatt et l'Université de Berne fournissent les locaux.

Didier Roulet
 SSPMP, rouletd@infomaniak.ch

Formation continue à Champéry, 28-29-30 septembre 2022

Enfin ! Après trois ans de privation, nous avons enfin pu ré-organiser une formation continue ; elle s'est déroulée comme précédemment à l'Hôtel Suisse de Champéry, hôtel qui est désormais équipé de deux belles salles de conférences dans ses propres murs. Le manque de cours de formation devait être aigu chez nos collègues, car les inscriptions ont rapidement atteint la capacité maximale de l'hôtel ; nous avons même dû refuser près d'une dizaine de demandes. Ce sont ainsi une soixantaine de personnes qui se sont retrouvées avec plaisir pour assister à ces dix conférences réparties sur trois jours.

Il serait fastidieux de résumer ici l'une après l'autre toutes ces présentations ; je n'en évoquerai que deux, en soulignant que ce choix est arbitraire car, comme à son habitude, la CRP avait invité des conférenciers de haut vol. Je me permets en effet de signaler que parmi les intervenants de nos précédentes formations, deux d'entre eux, Didier Queloz et Alain Aspect, se sont vus décerner rien moins que... le prix Nobel de physique !

Jean-Marc Lévy-Leblond a ouvert les feux avec des raisonnements très accessibles à nos élèves du secondaire II et quasiment dépourvus de calculs, si ce n'est celui de quelques ordres de grandeurs. Si l'on exige qu'une vie terrestre (non pas « sur Terre », mais au sens de « hors de l'eau »), évoluée et mobile puisse se développer à la surface d'un astre, on arrive à imposer un intervalle de valeurs pour la masse d'un astre en ne considérant que les forces électriques et de gravitation, et en faisant des approximations même très grossières. La gravitation doit en effet avoir une valeur minimale pour retenir une atmosphère gazeuse, et ne pas dépasser une valeur maximale pour que des êtres vivants puissent se déplacer. La gravitation limite aussi la taille maximale des « animaux terrestres », si l'on considère qu'ils doivent pouvoir chuter sans se briser. La différence essentielle entre ces deux forces - outre les 36 ordres de grandeur du rapport de leurs valeurs numériques - est que les forces de gravitation, uniquement attractives, se cumulent toujours, alors que les forces électriques sont soit attractives soit répulsives : le nuage électronique de l'atome « écrante » la charge de son noyau, si bien qu'au-delà de ses plus proches voisins, l'atome est essentiellement neutre. Ceci entraîne que, bien que ridiculement petite (elle est totalement négligeable lorsque l'on considère les interactions entre atomes), la force de gravitation l'emporte pour les grandes collections d'atomes : la géométrie des petits corps célestes est quelconque, alors qu'à partir de quelques centaines de kilomètres de diamètre, ils sont tous sphériques.

Roland Lehoucq a quant à lui présenté la notion d'horizon en cosmologie : quel domaine de l'espace et quel intervalle de temps sont-ils accessibles à un observateur donné ? On symbolise souvent l'espace-temps sur un graphe à deux dimensions (diagramme de Minkowski) dans lequel l'axe horizontal représente "l'espace" et l'axe vertical le produit $c \cdot t$. La lumière ayant une vitesse constante c , un signal lumineux émis à l'origine de ce système d'axes délimite un cône (dont c impose la pente) qui partage l'espace-temps en trois zones : passé absolu, futur absolu et éloignement absolu (« ailleurs » ou intervalle de genre espace). En raisonnant sur ces graphes, il a montré à quelle partie de l'espace-temps se limite le domaine observable, en tenant compte non seulement de la vitesse relative à l'observateur du phénomène observé (par exemple une étoile), mais aussi de l'expansion de l'univers, laquelle est de surcroît accélérée (résultat établi en 1999 récompensé par un Nobel attribué en 2011 à Perlmutter, Schmidt et Riess) ! Les lignes frontières entre les différents domaines, de droites qu'elles étaient, deviennent alors courbes, et changent radicalement d'aspect selon qu'on les trace pour un observateur ou pour l'autre : la richesse tout-à-fait insoupçonnée de ces graphes a surpris - et enchanté - tout l'auditoire. Ainsi, bien que l'Univers soit âgé de 13,8 milliards d'années, l'horizon cosmologique serait actuellement situé à une distance de 45 milliards d'années-lumière.

Mentionnons encore que Nicolas Gisin pour la cryptographie quantique (intrication), Nicolas Macris pour le calcul quantique (ordinateurs), Nathalie Besson pour les particules élémentaires (modèle standard), André Maeder pour la cosmologie (matière et énergie noires) et David Ehrenreich à propos des exoplanètes (composition des atmosphères), ont tous captivé l'auditoire en présentant la situation actuelle dans leur domaine.

J'espère ainsi vous avoir donné tant une idée de la richesse de cette formation, que l'envie de vous inscrire à celles des années futures.



Damien Dobler
CRM, damien.dobler@bluewin.ch

Probabilités et statistique : entre théories et applications

Colloque annuel de la CRM organisé à Champéry du 13 au 16 septembre 2022

La CRM a organisé un cours pour les enseignants du secondaire II qui a réuni 6 conférenciers et 42 participants à l'Hôtel Suisse à Champéry. L'accueil chaleureux de l'hôtel est toujours bien apprécié des participants. Ce cours s'est à nouveau déroulé dans sa salle de conférence avec vue sur le massif des Dents du Midi. Les problèmes rencontrés au niveau technique lors du cours 2021 ont pu être en partie corrigés avec l'ajout d'un deuxième écran de projection dans la salle. Celui-ci a permis aux participants assis à l'arrière de suivre plus aisément les textes projetés.

Le cycle de 10 conférences a débuté par une introduction à la théorie des probabilités par Christian Mazza. Durant son exposé, il a développé une partie des notions théoriques en s'appuyant sur le développement dyadique des nombres. Il a également considéré le besoin de se baser sur une λ -algèbre pour pouvoir définir une mesure de probabilités et la notion de variable aléatoire. Son premier exposé a aussi servi d'introduction à la présentation des chaînes de Markov qu'il a réalisé le jeudi matin. Dans celle-ci, il a abordé les notions de marche aléatoire, de graphe et de matrice de transition, ainsi que de régime stationnaire. Son exposé s'est aventuré dans l'algorithmique avec, par exemple, la description de la méthode de Métropolis ou du recuit simulé.

Anthony Davison a ramené les participants sur les bancs de l'université ou de l'école polytechnique avec 3 conférences sur les bases de l'inférence statistique. Ils ont ainsi pu découvrir ou revoir des éléments tels que l'inférence bayésienne, les intervalles de confiance, l'estimateur du maximum de vraisemblance ou encore la λ -valeur.

Yves Tillé a réalisé deux exposés sur la théorie des sondages. Les participants ont été sensibilisés aux difficultés et aux subtilités auxquelles sont confrontés les personnes chargées de réaliser des statistiques officielles. Dans de nombreuses diapositives, il a notamment présenté plusieurs méthodes d'échantillonnage ainsi que plusieurs types d'estimateurs.

Valérie Chavez-Demoulin a débuté son exposé par quelques exemples de situations où l'étude des valeurs extrêmes peut être utile, en développant plus particulièrement la suite d'événements et la mauvaise évaluation des risques qui ont conduit à l'explosion de la navette Challenger en 1986. Le cours s'est ensuite articu-

lé autour de la théorie des valeurs extrêmes, des mesures de risques et de l'évaluation de l'incertitude.

Linda Mhalla a clôturé le jeudi après-midi avec une présentation sur les principes et les méthodes liés à la notion de causalité. Elle a traité entre autres de conditions d'identifiabilité de l'effet causal, les notions de variable de confusion et instrumentale, la mesure de l'effet causal ainsi que les graphes orientés acycliques causaux.

Alix Zollinger a terminé la semaine en réalisant un exposé sur l'analyse de données génomiques. Ce dernier a permis d'entrevoir le travail d'une spécialiste en data science dans un groupe de recherche au sein de l'entreprise Nestlé. En s'appuyant sur 3 exemples concrets de recherches, dont une sur la composition du lait maternel, elle a montré la complexité de traiter un nombre très important de données à l'aide de l'analyse en composantes principales ou de l'UMAP (Uniform Manifold Approximation and Projection) afin de réduire "la dimension pour visualiser les données tout en préservant les informations sur la structure".

Au terme de ce cours, les participants se sont déclarés satisfaits du niveau scientifique des conférenciers et de l'organisation générale du cours. Par contre, ils ont exprimés quelques réserves sur les possibilités de transférer directement les éléments étudiés durant la semaine dans leur enseignement. Un travail sur ces derniers sera nécessaire avant de les présenter en classe.

Bulletin N° 151

Impressum

Herausgeber — *Éditeur*

VSMP – SSPMP – SSIMF

Korrespondenz — *Correspondance*

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch
Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58
8840 Einsiedeln

Layout — *Mise en page*

Samuel Byland samuel.byland@vsmp.ch
Weinbergstrasse 48b Tel. 079 728 63 97
5000 Aarau

Inserateverwaltung — *Publicité*

Hansjürg Stocker hjstocker@bluewin.ch
Friedheimstrasse 11 Tel. 044 780 19 37
8820 Wädenswil

Bestimmungen für Inserate und Beilagen

— *Tarifs pour les annonces et les annexes*

Inserate:

ganzseitig Fr. 500.–

halbseitig Fr. 300.–

Beilagen:

bis 20 g Fr. 500.–

über 20 g nach Vereinbarung

Adressänderungen — *Changement d'adresse*

VSMP Mitglieder — Membres de la SSPMP:

VSG – SSPES – SSISS

Sekretariat (Frau Doris Lazzeri)

Monbijoustrasse 36

3011 Bern

Tel. 031 382 52 33

information@vsg-sspes.ch

übrige Abonnenten — autres abonnés:

Franz Meier franz.e.meier@bluewin.ch

Werner-Kälin-Strasse 1 Tel. 041 210 25 58

8840 Einsiedeln

Auflage — *Tirage*

800 Exemplare

erscheint dreimal jährlich

Präsident VSMP — SSPMP — SSIMF

Josef Züger praesident@vsmp.ch

Via Salens Tel. 081 641 10 94

7402 Bonaduz

Deutschschweizerische Mathematikkommission

Andrea Peter praesident@dmk.vsmsp.ch

Kantonsschule Sursee

Moosgasse 11

6210 Sursee

Deutschschweizerische Physikkommission

Christian Stulz christian.stulz@gymburgdorf.ch

Gymnasium Burgdorf Tel. 031 638 03 03

Pestalozzistrasse 17

3400 Burgdorf

Commission Romande de Mathématique

Tatiana Mantuano tatiana.mantuano@gbjb.ch

Grand'Rue 16 Tél. 032 544 47 53

2075 Wavre

Commission Romande de Physique

Yves Oestreicher yves.oestreicher@edu.ge.ch

Malvand 13 Tél. 079 796 69 95

1292 Chambésy

Commissione di Matematica della Svizzera Italiana

Guido Lob guido.lob@edu.ti.ch

Via Borghese 14 Tel. 078 663 13 37

6600 Locarno

Redaktionsschluss (Erscheinungsdatum)

— *Délais de rédaction (de parution)*

Nr. 152 31.03.2023 (Ende Mai)

Nr. 153 31.07.2023 (Ende September)

Nr. 154 30.11.2023 (Ende Januar)

Druck und Versand — *Imprimerie*

Niedermann Druck AG

Letzistrasse 37

9015 St. Gallen

www.niedermanndruck.ch

Internet:

www.vsmsp.ch – www.sspmp.ch – www.ssimf.ch



V S M P
S S P M P
S S I M F

Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrkräfte
Société Suisse des Professeurs de Mathématique et de Physique
Società Svizzera degli Insegnanti di Matematica e di Fisica